

שאלה 1 · התפלגות נורמלית: שבירת שיא בריצת 400 מטר

במועדון אתלטיקה מתאמנים לתחרות בריצת 400 מטר. השיא של המועדון בריצה זו הוא 48 שניות. קבוצה גדולה של רצים מתאמנת לקראת התחרות. זמני הריצה של הרצים בקבוצה מתפלגים נורמלית עם ממוצע של 52 שניות וסטיית תקן של 1.6 שניות. בוחרים באקראי רץ מן הקבוצה.

א. מהי ההסתברות שהרץ שנבחר ישבור את שיא המועדון (כלומר, ירוץ בזמן קצר יותר מזמן השיא)?

במועדון מתאמנות שתי קבוצות: קבוצה של 120 רצים שממוצע זמן הריצה שלהם הוא 52 שניות, וקבוצה של 80 רצים שממוצע זמן הריצה שלהם הוא 54.5 שניות.

ב. מהו הממוצע של זמן הריצה של כל 200 הרצים?

נתון כי זמני הריצה של כל 200 הרצים מתפלגים נורמלית, וכי זמן הריצה של 40 מבין 200 הרצים הוא פחות מ-50.9 שניות.

ג. מהי סטיית התקן של זמני הריצה של כל 200 הרצים?

בוחרים באקראי רץ מבין כל 200 הרצים.

ד. מהי ההסתברות שהרץ שנבחר ישבור את שיא המועדון?

שאלה 2 · ישר רגרסיה: שעות אימון ודופק במנוחה

נועה ערכה מחקר. היא בדקה את הקשר בין מספר שעות האימון בשבוע של 15 רצים (משתנה x) ובין הדופק שלהם במנוחה, בפעימות לדקה (משתנה y). נועה רצתה למצוא ישר רגרסיה לניבוי y לפי x . היא חישה את הממוצע ואת סטיית התקן של מספר שעות האימון, וכן את מקדם המתאם בין שני המשתנים, וקיבלה את התוצאות האלה: $\bar{x} = 6$, $s_x = 2.4$, $r = -0.82$. נועה מצאה כי משוואת ישר הרגרסיה היא: $y = -2.05x + 72.4$.

א(1). מצאו את הממוצע של הדופק במנוחה של הרצים (הממוצע של המשתנה y).

א(2). מצאו את סטיית התקן של הדופק במנוחה של הרצים.

אדם שלא השתתף במחקר אינו מתאמן כלל.

ב. על פי ישר הרגרסיה, מהו הדופק במנוחה של אדם זה?

רץ נוסף, שלא השתתף במחקר, מתאמן 10 שעות בשבוע.

ג. האם אפשר להסיק כי הדופק במנוחה של רץ זה הוא בדיוק 51.9 פעימות לדקה? נמקו את תשובתכם.

שאלה 3 · הסתברות: שני סיבובים במשחק עם תיקו

נועה ואיתי משחקים משחק. כל סיבוב במשחק יכול להסתיים באחת משלוש האפשרויות האלה: ניצחון של נועה, ניצחון של איתי או תיקו.

ההסתברות שנועה תנצח בסיבוב כלשהו גדולה פי 4 מן ההסתברות שאיתי ינצח בסיבוב כלשהו. ההסתברות שסיבוב יסתיים בתיקו היא 0.15.

א. מצאו את ההסתברות שנועה תנצח בסיבוב כלשהו במשחק.

במשחק שנועה ואיתי משחקים יש שני סיבובים. התוצאות של הסיבובים אינן תלויות זו בזו.

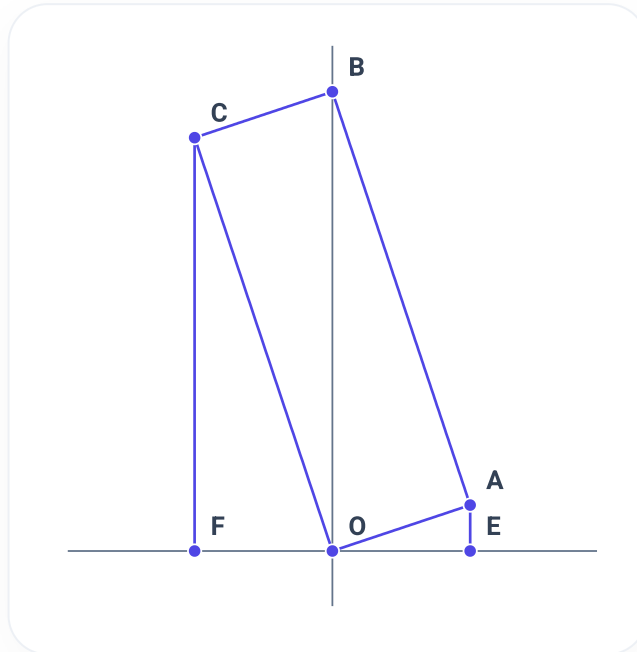
ב. מהי ההסתברות ששום סיבוב לא יסתיים בתיקו?

ג. מהי ההסתברות שנועה תנצח לפחות באחד מן הסיבובים?

ד. ידוע שנועה ניצחה לפחות באחד מן הסיבובים. מהי ההסתברות שאחד מן הסיבובים הסתיים בתיקו?

שאלה 4 · מקבילית במערכת צירים: יחס דמיון 3 ומלבן

במקבילית $OABC$ הקודקוד B מונח על ציר ה- y והנקודה O היא ראשית הצירים. מן הקודקודים A ו- C העבירו אנכים לציר ה- x , החותכים אותו בנקודות E ו- F בהתאמה. נתון: $\angle AOE = \angle COB$.



א(1). הוכיחו: $\angle AOE = \angle OCF$.

א(2). הוכיחו כי המשולשים AOE ו- OCF דומים.

שטח המשולש OCF גדול פי 9 משטח המשולש AOE . משוואות הישרים AE ו- CF הן: $x = 6$ ו- $x = -6$ בהתאמה.

ב(1). מצאו את יחס הדמיון בין המשולשים OCF ו- AOE .

ב(2). מצאו את אורכי הצלעות OE ו- CF .

ב(3). מצאו את שיעורי הקודקודים C ו- A .

ג. מצאו את שיעורי הקודקוד B .

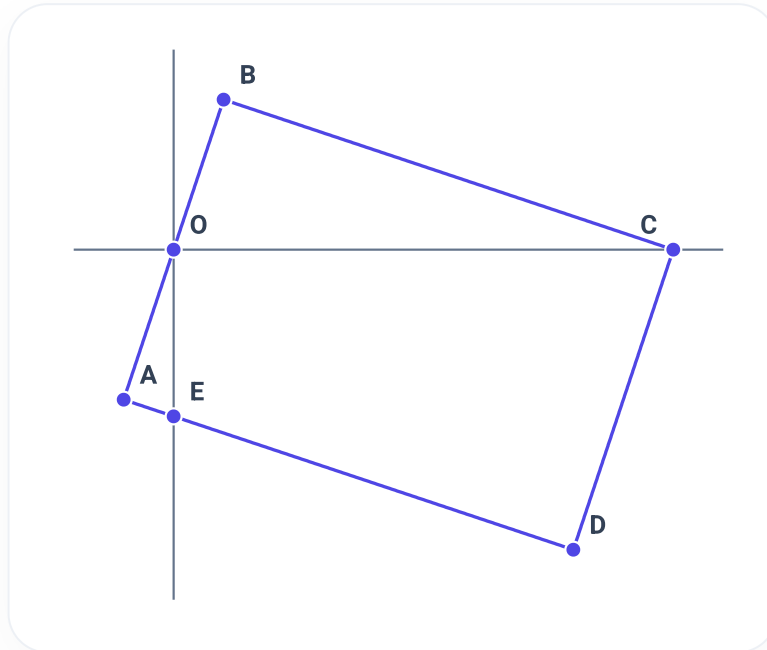
ד. הוכיחו כי המקבילית $OABC$ היא מלבן.

ה. אלכסוני המלבן $OABC$ נפגשים בנקודה M .

ה. האם נכון כי: $S_{AOE} + S_{CFO} = 2 \cdot S_{BCM}$? נמקו את תשובתכם.

שאלה 5 · מלבן במערכת צירים: דמיון משולשים, שיעורי קודקוד ושטח

נתון מלבן $ABCD$ שבו $AB : BC = 2 : 3$. הצלע AB עוברת דרך ראשית הצירים, O . הצלע AD חותכת את ציר ה- y בנקודה E . הקודקוד C מונח על ציר ה- x (ראו סרטוט).



א(1). הוכיחו: $\angle AEO = \angle BOC$.

א(2). הוכיחו: $\triangle OAE \sim \triangle CBO$.

נתון: הנקודה O היא אמצע הצלע AB .

ב. מצאו את היחס: $\frac{BO}{AE}$.

נתון: $E(0, -10)$.

ג. מצאו את אורך הקטע OC ואת שיעורי הנקודה C .

נתון: שיפוע הצלע BC הוא $-\frac{1}{3}$.

ד. מצאו את שיעורי הנקודה B .

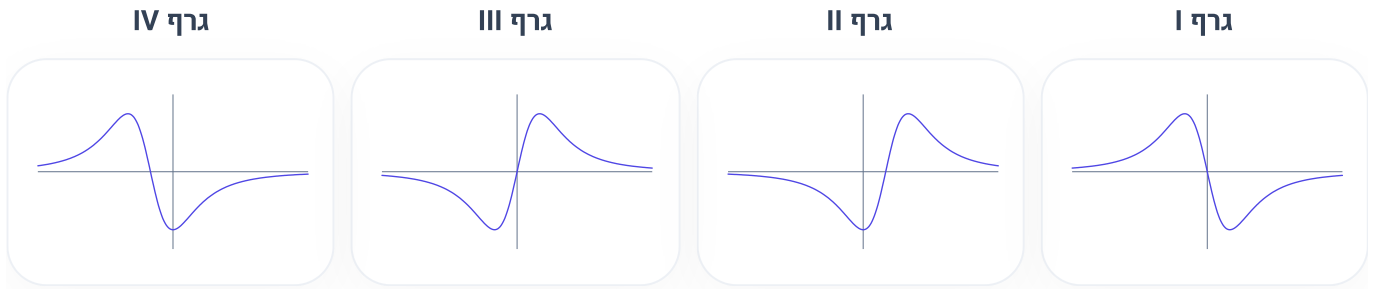
ה. מצאו את שטח המלבן $ABCD$.

ו. האם מתקיים: $\angle BCO = \angle OCE$? נמקו.

שאלה 6 · חקירת פונקציה רציונלית, זיהוי גרף הנגזרת ושטח מתחתיו

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2-33}{x^2+3} + 2$, המוגדרת לכל x .

בסוף השאלה מופיעים ארבעה גרפים I-IV:



א. מצאו את משוואת האסימפטוטה המקבילה לציר ה- x של הפונקציה $f(x)$.

ב(1). מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ב(2). רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה(1). קבעו איזה מבין הגרפים I-IV מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$. נמקו את קביעתכם.

ה(2). חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה- x , ועל ידי הישרים $x = -3$, $x = 3$.

שאלה 7 · חקירת פונקציית שורש, שיקוף ושטח בין גרף לשיקופו

נתונה הפונקציה: $f(x) = (x-6) \cdot \sqrt{x+3}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ג. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = -f(x)$.

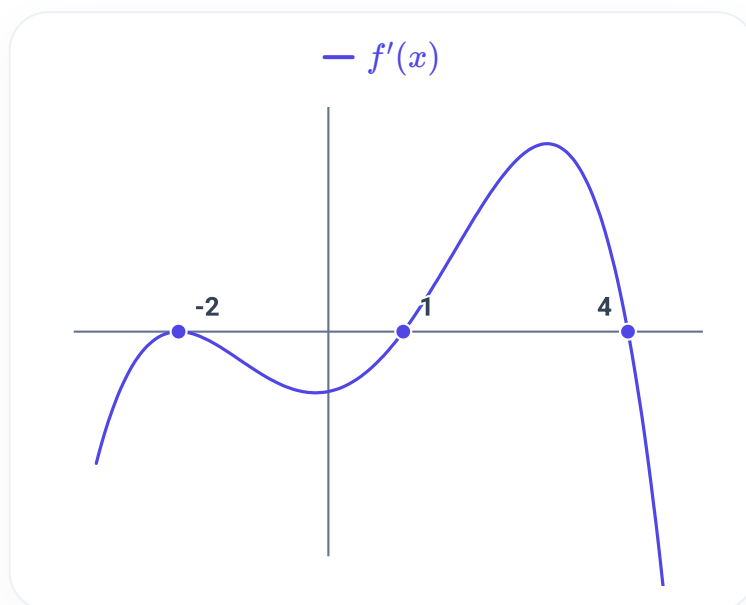
ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ במערכת הצירים שבה סרטטתם את גרף הפונקציה $f(x)$.

נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

ו. הביעו באמצעות S את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$. נמקו.

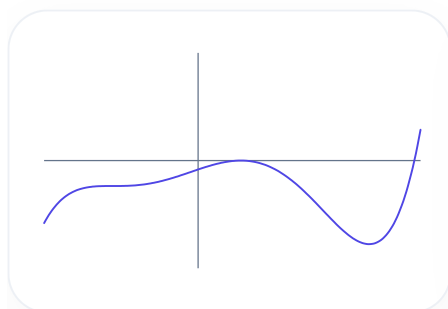
שאלה 8 · מגרף הנגזרת לפונקציה: נקודה אופקית בצד ושטח שאינו מחליף סימן

הפונקציה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ מוגדרות לכל x . לפניכם סרטוט של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$. נתון: פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מתאפסת בנקודות שבהן: $x = -2$, $x = 1$, $x = 4$ בלבד, כמתואר בסרטוט.

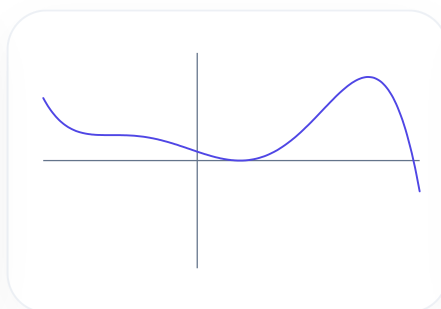


בהמשך השאלה מופיעים הגרפים I-III:

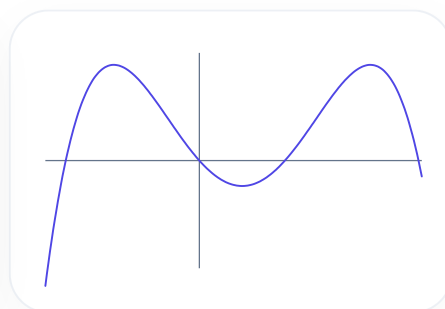
גרף III



גרף II



גרף I



א(1). מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מה הם שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, ומהו סוגן? נמקו.

ב. אחד מן הגרפים I-III מתאר את גרף הפונקציה $f(x)$. קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.

ג. נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ עובר דרך הנקודה $(1, 0)$.

נסמן ב- S_1 את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי הישר $x = -2$ ועל ידי ציר ה- x בתחום: $-2 \leq x \leq 1$.

נסמן ב- S_2 את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי הישר $x = 4$ ועל ידי ציר ה- x בתחום: $1 \leq x \leq 4$.

האם מתקיים: $S_1 + S_2 = \int_{-2}^4 f(x) dx$? נמקו את קביעתכם.

ד. נתונה הפונקציה: $g(x) = f(x + 3)$. מהם שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, ומהו סוגן? נמקו.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math