

שאלה 1 · שאלות קצרות: אינדוקציה על n אי-זוגי, הסתברות מותנית, תחומי הגדרה של פונקציות שורש,

$$f^2 f'$$

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

נתון כי השוויון $2 + 12 + 30 + \dots + n(n+1) = \frac{(n+1)(n+a)(2n+1)}{12}$ מתקיים בעבור $n = 3$. הוא פרמטר.

א(1). מצאו את הערך של a .

א(2). בעבור הערך של a שמצאתם, הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי השוויון הנתון מתקיים לכל n טבעי אי-זוגי.

בבית קפה בדקו מה קנו הלקוחות. נמצא כי מספר הלקוחות שקנו רק קפה גדול פי 2 ממספר הלקוחות שקנו גם קפה וגם מאפה. $\frac{2}{3}$ מן הלקוחות שקנו מאפה, קנו גם קפה. נסמן ב- p את ההסתברות לבחור באקראי לקוח שקנה רק קפה.

ב(1). הביעו באמצעות p את ההסתברות לבחור באקראי לקוח שקנה לפחות אחד משני המוצרים.

ב(2). ידוע שנבחר באקראי לקוח שקנה לפחות אחד משני המוצרים. מה ההסתברות שהלקוח שנבחר קנה גם קפה וגם מאפה?

נתונות הפונקציות: $h(x) = \sqrt{\frac{x^2-4}{x}}$, $g(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$, $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$.

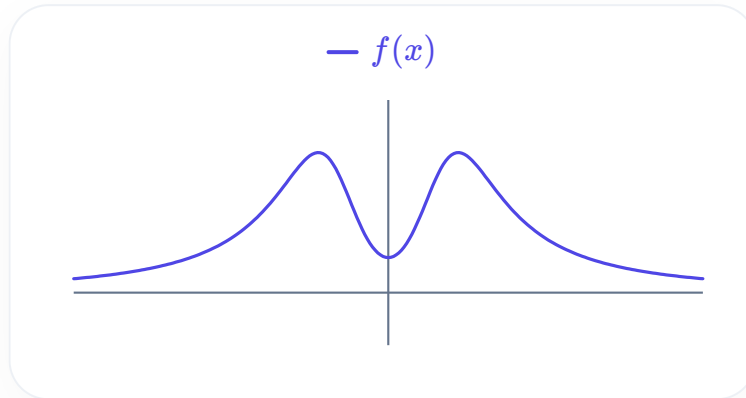
ג(1). מצאו את תחום ההגדרה של כל אחת מן הפונקציות $h(x)$, $g(x)$ ו- $f(x)$.

לפניכם הגרפים 1-5.



ג(2). התאימו לכל אחת מן הפונקציות $h(x)$, $g(x)$ ו- $f(x)$ את הגרף המייצג אותה מבין הגרפים 1-5 שלפניכם. נמקו את קביעותיכם.

הפונקציה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$, מוגדרות לכל x . בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$. נתון כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית, הגרף שלה חותך את ציר ה- y בנקודה $(0, 1)$, ובתחום $x > 0$ יש לה נקודת קיצון אחת בלבד: נקודת מקסימום ששיעורה $(2, 4)$. לפונקציה $f(x)$ ולפונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ יש אסימפטוטה אופקית $y = 0$.



ד(1). סרטוטו של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = f^2(x) \cdot f'(x)$.

ד(2). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x .

ד(3). חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x . (הדרכה: גזרו את הפונקציה $\frac{f^3(x)}{3}$).

שאלה 2 · סדרה הנדסית: סדרות של מכפלות איברים, מונוטוניות וסכום אין-סופי עם פרמטר

נתונה סדרה הנדסית אין-סופית A שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \dots$.

נתון: $a_1 - 3a_3 = 12$, $\frac{a_5}{a_3} = \frac{1}{9}$.

א. מצאו את הערך של a_2 (מצאו את שתי האפשרויות).

נתון כי הסדרה A לא עולה ולא יורדת.

בונים מאיברי הסדרה A סדרה אין-סופית חדשה B . נתון כי איברי הסדרה B מקיימים $b_n = a_n \cdot a_{n+1}$ לכל n טבעי.

ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, ומצאו את המנה שלה.

בונים מאיברי הסדרה A סדרה הנדסית אין-סופית נוספת C . איברי הסדרה C הם:

$k \cdot a_1 \cdot a_3, k \cdot a_3 \cdot a_5, k \cdot a_5 \cdot a_7, \dots$. $k \neq 0$ הוא פרמטר.

ג(1). מצאו את מנת הסדרה C .

ג(2). מצאו בעבור אילו ערכים של k הסדרה C עולה. נמקו את תשובתכם.

נסמן ב- S_B את סכום הסדרה B , וב- S_C את סכום הסדרה C .

נתון $S_C = 3 \cdot S_B$.

ד. מצאו את הערך של k .

שאלה 3 · הסתברות: משאל בקאנטרי - טבלה עם פרמטר, הסתברות מותנית, איחוד וברנולי

בקאנטרי גדול הועלתה הצעה להאריך את שעות הפתיחה של הבריכה בערב. בעקבות זאת נערך משאל ובו השתתפו כל המנויים הוותיקים וכל המנויים החדשים.

על פי תוצאות המשאל התברר כי 60% מן המשתתפים שבעד ההצעה הם מנויים ותיקים. עוד התברר כי מספר המנויים הוותיקים שבעד ההצעה גדול פי 2 ממספר המנויים החדשים שנגד ההצעה. מבין המשתתפים במשאל לא היו נמנעים.

נסמן ב- p את ההסתברות לבחור באקראי מנוי שבעד ההצעה מבין כל המנויים שהשתתפו במשאל.

א. בחרו באקראי אחד מן המנויים החדשים. מהי ההסתברות שהוא נגד ההצעה?

ידוע כי ההסתברות שמנוי שנבחר באקראי מבין המנויים הוותיקים הוא בעד ההצעה, גדולה ב- $\frac{2}{7}$ מן ההסתברות שמנוי שנבחר באקראי מבין המנויים החדשים הוא בעד ההצעה.

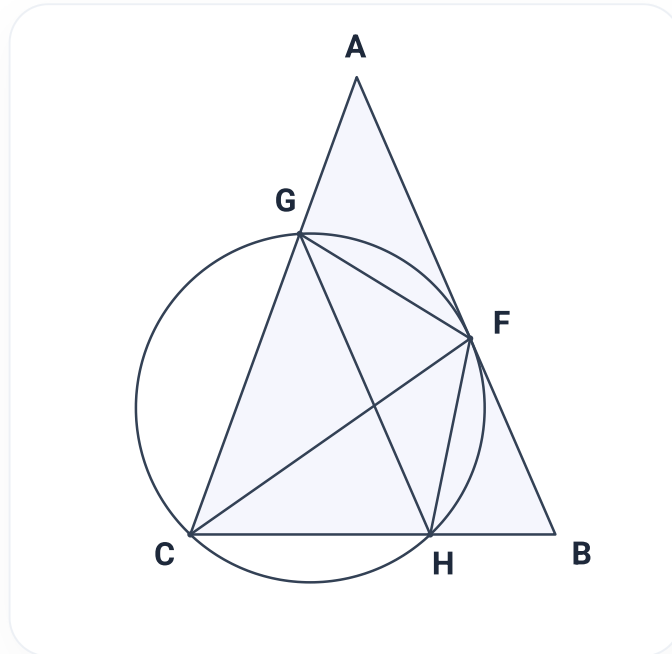
ב. חשבו את הערך של p .

ג. בחרו באקראי אחד מן המשתתפים במשאל. חשבו את ההסתברות שמתקיים לפחות אחד משני התנאים האלה: (1) המשתתף שנבחר הוא מנוי חדש. (2) המשתתף שנבחר בעד ההצעה.

ד. בחרו באקראי 6 מן המשתתפים במשאל. ידוע כי כל השישה שנבחרו הם מנויים חדשים. מהי ההסתברות שלפחות שניים מהם בעד ההצעה וגם לפחות שניים מהם נגד ההצעה?

שאלה 4 · מעגל דרך קודקוד המשיק לצלע שמולו: מיתרים שווים, חוצה זווית, דמיון ומרובע בר-חסימה

במשולש ABC נתון $\angle ACB = 70^\circ$. הנקודות G , H ו- F נמצאות על הצלעות AC , CB ו- AB בהתאמה, כך שהמרובע $GCHF$ חסום במעגל (ראו סרטוט).
נתון: AB משיק למעגל בנקודה F , $GH \parallel AB$.



א. הוכיחו: $FG = FH$.

ב(1). מצאו את גודל הזווית $\angle BCF$.

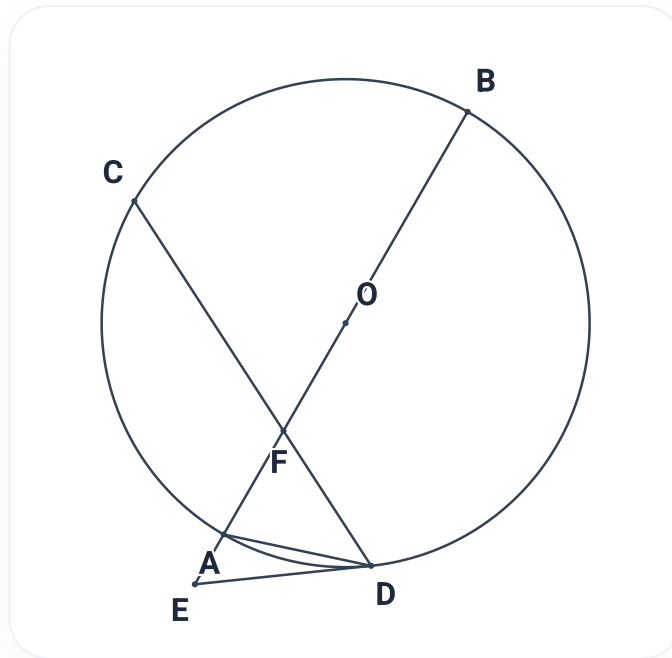
ב(2). הוכיחו: $\triangle CHF \sim \triangle CFA$.

קוטר המעגל היוצא מנקודה F חותך את הצלע AC בנקודה E . BK הוא הגובה לצלע AC (K על AC).

ג. הוכיחו: $\angle FEB = \angle FKB$.

שאלה 5 · מעגל, משיק וקוטר: משולש שווה-שוקיים EFD , שטח במשפט הסינוסים ומשוואה עם $\tan \alpha$

AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R ומרכזו O . המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשך הקוטר AB בנקודה E . הנקודה F נמצאת על הקוטר AB , וההמשך של הקטע DF חותך את המעגל בנקודה C (ראו סרטוט). נסמן: $\angle ADE = \alpha$.



א. הראו כי: $\angle AED = 90^\circ - 2\alpha$.

נתון כי: $EF = ED$.

ב. הביעו באמצעות α את גודל $\angle AFD$.

ג. הביעו באמצעות α ו- R את שטח המשולש AFD .

ד(1). הביעו באמצעות α את יחס השטחים $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}}$.

ד(2). נתון כי: $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}} = \sqrt{2}$. מצאו את α .

שאלה 6 · חקירת $\frac{12x}{x^2+a}$ עם פרמטר, והשטח בין $\frac{-f'}{f^2}$ לציר ה- x

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{12x}{x^2+a}$. a הוא פרמטר חיובי.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן. הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

נתון כי שיעור ה- y של נקודת המקסימום של הפונקציה $f(x)$ הוא 3.

ג. מצאו את הערך של a .

בעבור הערך של a שמצאתם ענו על הסעיפים ד-ה.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$.

ה(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ה(2). מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$.

ה(3). חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x בתחום $1 \leq x \leq \sqrt{a}$.

שאלה 7 · חקירת $\cos^2 x - \sqrt{\cos x}$: קיצון בקצוות, גרף הנגזרת ושטח בעזרת זוגיות

נתונה הפונקציה: $f(x) = \cos^2 x - \sqrt{\cos x}$, בתחום: $-\pi \leq x \leq \pi$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). הראו כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

א(3). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

א(4). מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן (בתשובתכם דייקו 2 ספרות אחרי הנקודה העשרונית).

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

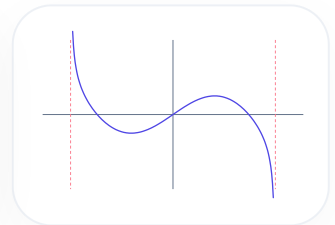
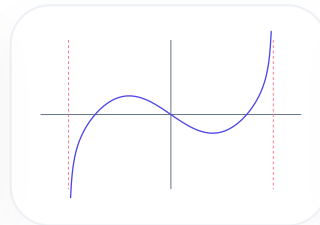
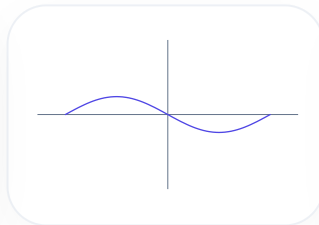
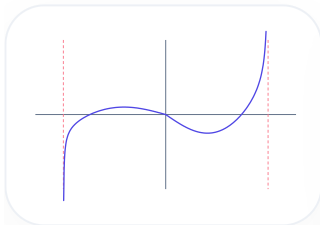
ד. קבעו איזה מן הגרפים I-IV שלפניכם מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

גרף IV

גרף III

גרף II

גרף I



נתונה הפונקציה: $g(x) = k - f(x)$, k הוא פרמטר חיובי. הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות באותו התחום.

נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x בתחום בין 0 ל- $\frac{\pi}{2}$. נתון כי השטח

המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ ועל ידי הישרים $x = -\frac{\pi}{2}$ ו- $x = \frac{\pi}{2}$ הוא $10 \cdot S$.

ה. הביעו את k באמצעות S .

שאלה 8 · חקירת $\frac{16x}{x^2+3}$, מכפלת קטעים אנכיים שמקסימלית בנקודת הפיתול, והזזה ומתיחה

נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x}$, המוגדרת בתחום: $x \geq 0$, ונתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{16x}{x^2+3}$, המוגדרת לכל x .
א(1). מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

א(2). מצאו את שיעורי נקודות הפיתול של הפונקציה $g(x)$.

א(3). סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של כל אחת מן הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

בנקודה $C(t, 0)$, $t > 0$, מעבירים אנך לציר ה- x . האנך חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A ואת הגרף של הפונקציה $g(x)$ בנקודה B.

ב. הביעו באמצעות t את מכפלת אורכי הקטעים AC ו-BC.

ג. הוכיחו כי מכפלת אורכי הקטעים AC ו-BC מקסימלית כאשר הנקודה B היא נקודת פיתול של הפונקציה $g(x)$.

נתונה הפונקציה: $k(x) = \frac{4(x-1)\sqrt{x-1}}{(x-1)^2+3}$, המוגדרת בתחום: $x \geq 1$.

ד. היעזרו בסעיפים הקודמים של השאלה. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $k(x)$, וקבעו את סוגה. נמקו את תשובתכם.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math