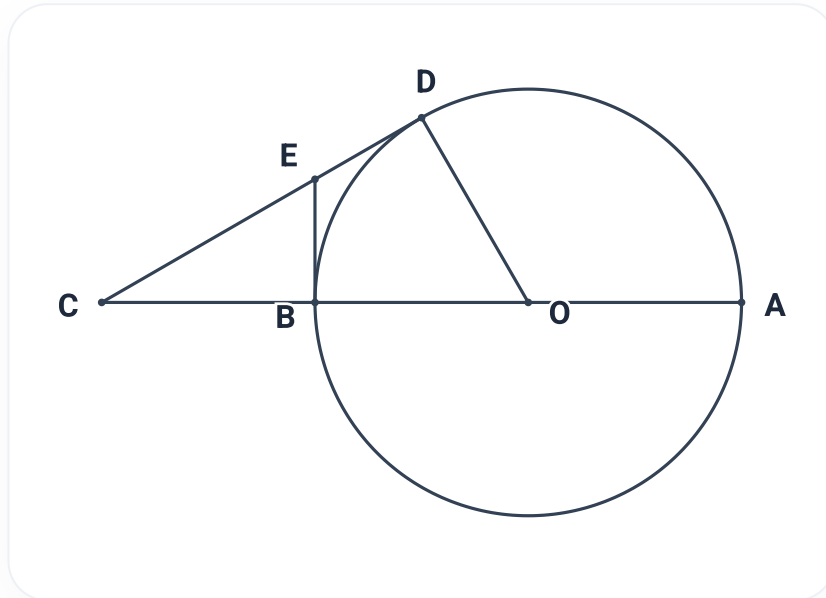


שאלה 1 · שאלות קצרות: אינדוקציה, מרובע בר-חסימה, גרפים של פונקציות שורש, גרף הנגזרת ואינטגרלים

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. בעבור כל n טבעי הוכיחו באינדוקציה או בדרך אחרת כי מתקיים: $\frac{2A}{3} + \frac{2A}{3^2} + \dots + \frac{2A}{3^n} = A \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$

הנקודה B היא אמצע הקטע AB. OC הוא קוטר במעגל שמרכזו O ורדיוסו R. מן הנקודה C מעבירים ישר המשיק למעגל בנקודה D. B מנקודה B מעבירים משיק נוסף למעגל. שני המשיקים נחתכים בנקודה E (ראו סרטוט).



ב(1). הוכיחו כי המרובע OBED הוא בר חסימה במעגל.

ב(2). הביעו באמצעות R את רדיוס המעגל החוסם את המרובע OBED.

לפניכם שלוש פונקציות והגרפים א-ד. כל אחת מן הפונקציות מתוארת על ידי אחד מן הגרפים.

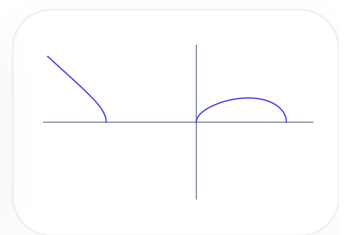
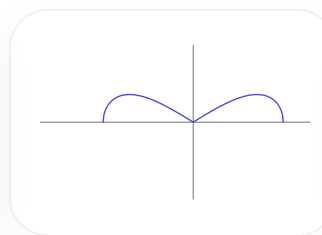
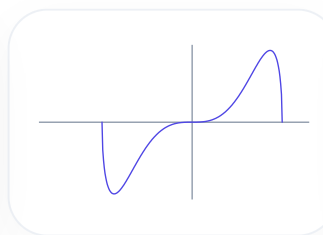
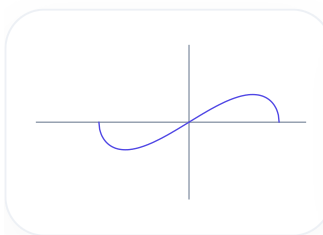
$$k(x) = x\sqrt{4-x^2}, \quad h(x) = \sqrt{x(4-x^2)}, \quad f(x) = \sqrt{x^2(4-x^2)}$$

גרף ד

גרף ג

גרף ב

גרף א

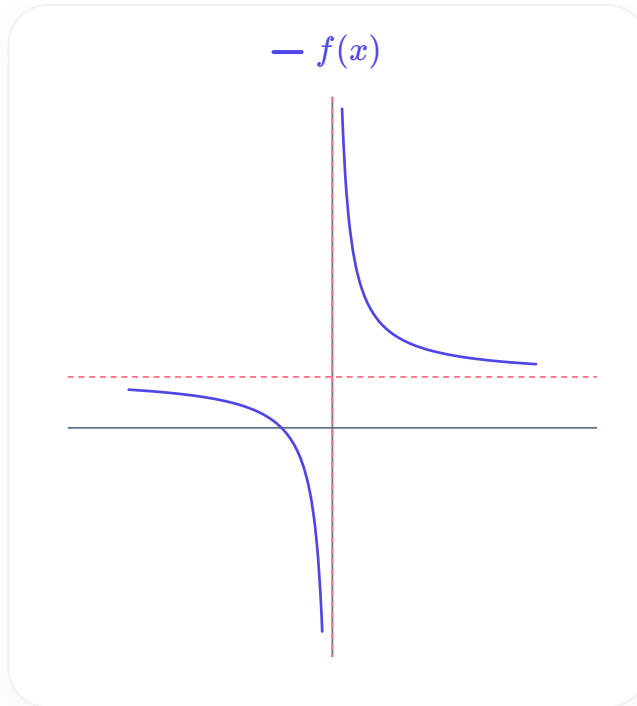


ג(1). בעבור כל אחת מן הפונקציות, קבעו איזה מן הגרפים מתאר אותה. נמקו את קביעותיכם.

נתונה הפונקציה: $g(x) = x^n \sqrt{4-x^2}$, n הוא פרמטר טבעי גדול מ-1.

ג(2). מצאו עבור אילו ערכים של n , הגרף הנותר מתאר את הפונקציה $g(x)$.

לפניכם גרף של הפונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל $x \neq 0$. הישרים $y = 1$ ו- $x = 0$ הם אסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$. הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה עבור $x < 0$ וקעורה כלפי מעלה עבור $x > 0$.



ד(1). סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ד(2). רשמו את תחומי העלייה והירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה).

נתון: $a > 0$ הוא פרמטר.

ד(3). סדרו את הביטויים (1)-(4) שלפניכם מן הקטן ביותר אל הגדול ביותר (כתבו בצד שמאל את מספרו של הביטוי הקטן ביותר וכן הלאה). (1) המספר 1 (2) $\int_{a+1}^{a+2} f(x)dx$ (3) $\int_a^{a+1} f(x)dx$ (4) $\int_a^{a+1} f'(x)dx$.

שאלה 2 · סדרה הנדסית: סדרת הריבועים, סכום מתחלף ותת-סדרה במקומות האי-זוגיים

נתונה סדרה הנדסית A שאיבריה הם: $a_1, a_2, a_3, \dots$ ומנתה היא q . כל איברי הסדרה A שונים מאפס.

א. האם הסדרה: $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots$ היא סדרה הנדסית? הוכיחו את תשובתכם.

ב(1). מסמנים ב- S_n את הסכום של n האיברים הראשונים של הסדרה A. יהי n מספר טבעי אי-זוגי. הוכיחו כי:
 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 = S_n \cdot (a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_n)$

ב(2). נתון: $a_1 = 4$, $q = 2$, ו- n הוא מספר טבעי אי-זוגי. הסכום $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ גדול פי 508 מן הסכום: $a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_n$. מצאו את n .

הסדרה C מתקבלת מן הסדרה A על ידי לקיחת האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים בסדרה A: $c_1 = a_1$, $c_2 = a_3$, $c_3 = a_5$, וכך הלאה. נסמן ב- T_m את הסכום של m האיברים הראשונים של הסדרה C. נתון כי m הוא מספר טבעי אי-זוגי.

ג. נתונה נוסחה: $a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 + \dots + a_{2m-1}^2 = T_m \cdot (a_1 - a_3 + a_5 - \dots + a_{2m-1})$. קבעו אם הנוסחה הנתונה נכונה. הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 3 · משחק עם שלוש תוצאות: מציאת p , ברנולי, משחקים מסוימים והסתברות מותנית

יואב משחק שחמט נגד מחשב. בכל משחק יש בדיוק שלוש תוצאות אפשריות: ניצחון, תיקו והפסד. ההסתברות שיואב יפסיד במשחק גדולה פי 2 מן ההסתברות שהוא ינצח במשחק. נסמן ב- p את ההסתברות שיואב ינצח במשחק ($p > 0$). בשאלה כולה תוצאות המשחקים אינן תלויות זו בזו. נתון שאם יואב משחק 2 משחקים בזה אחר זה, ההסתברות שהוא יפסיד במשחק אחד לפחות היא $3.2p$.

א. מצאו את הערך של p .

יואב שיחק 5 משחקים בזה אחר זה.

ב. מצאו את ההסתברות שיואב יפסיד ב-3 משחקים לפחות.

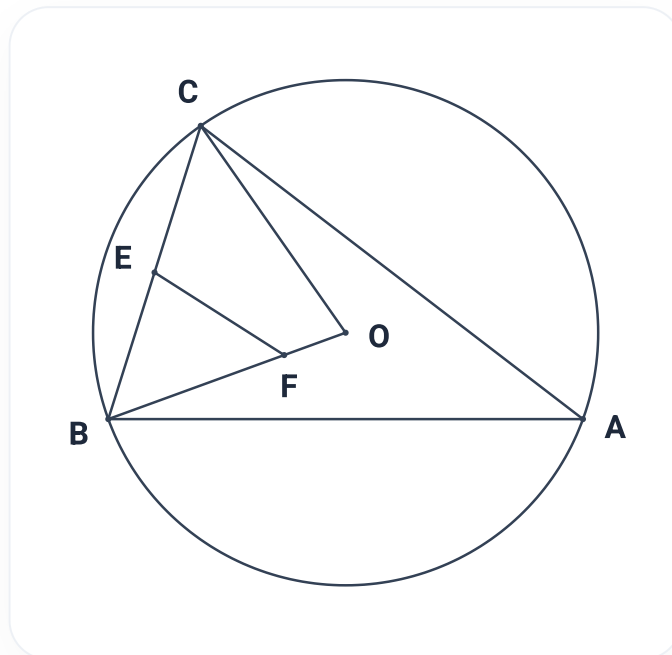
ג. מצאו את ההסתברות שיואב יפסיד בשלושת המשחקים הראשונים לפחות.

ד(1). מצאו את ההסתברות שיואב לא ינצח בשום משחק.

ד(2). ידוע כי יואב ניצח במשחק אחד לפחות. מהי ההסתברות שהוא הפסיד בשלושת המשחקים הראשונים וקיבל תוצאת תיקו במשחק האחרון?

שאלה 4 · משולש חד-זוויות ומרובע בר-חסימה CEFO: ניצבות מהמרכז ומעגלים משיקים

משולש חד-זוויות ABC חסום במעגל שמרכזו O. הנקודה E נמצאת על הצלע BC, והנקודה F נמצאת על הקטע BO, כמתואר בסרטוט. נתון כי המרובע CEFO הוא בר חסימה במעגל.



א. הוכיחו: $EF = EB$.

המעגל החוסם את המרובע CEFO חותך את הצלע AC בנקודה D כך ש-ED מקביל ל-AB.

ב(1). הוכיחו: $OE \perp BC$.

ב(2). הוכיחו: $OD \perp AC$.

הישר ℓ משיק בנקודה C למעגל החוסם את המשולש ABC.

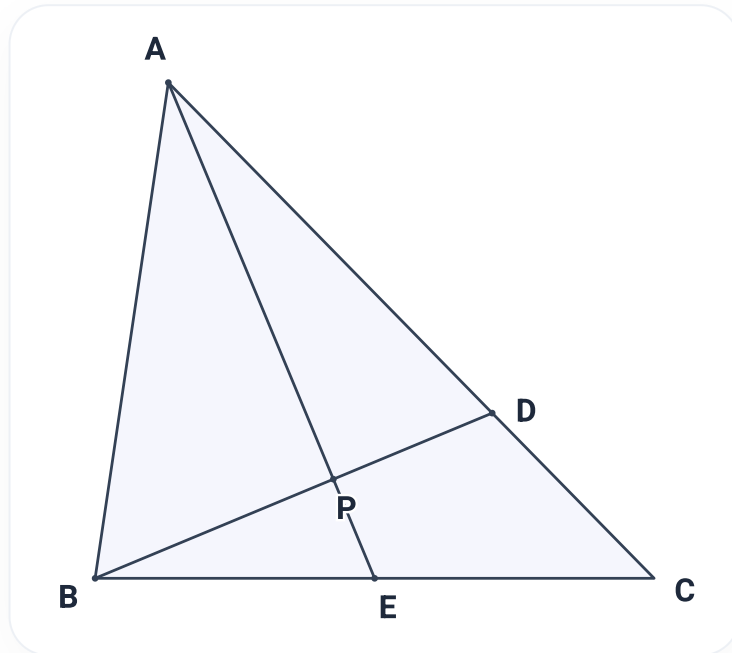
ג. הוכיחו כי הישר ℓ משיק למעגל החוסם את המרובע CEFO.

שאלה 5 · תיכון וחותר מאונכים במשולש: משפט הסינוסים, זווית כפולה ורדיוסי מעגלים חוסמים

במשולש ABC , AE הוא תיכון לצלע BC . הנקודה D נמצאת על הצלע AC . AE ו- BD נחתכים בנקודה P (ראו סרטוט).

נתון: $AP = 4 \cdot PE$.

נסמן: $AB = k$, $\angle BAP = \alpha$, $\angle ABP = \beta$, $\alpha < \beta$.



א. הביעו באמצעות α , β ו- k את אורכי הקטעים AE ו- BP .

נתון כי AE ו- BD מאונכים זה לזה, וכי שטח המשולש ABE הוא $0.3k^2$.

ב. מצאו את גודל הזווית α .

ג. מצאו את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש BDC ובין רדיוס המעגל החוסם את המשולש BDA .

שאלה 6 · פונקציית שורש עם פרמטר: היעדר אסימפטוטות, חקירה, $f(x+1) - |f(x)|$ ואינטגרלים

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{(x-3)(x+2)^2}{\sqrt{x+a}}$, a הוא פרמטר חיובי.

א. הביעו באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ אין אסימפטוטות מאונכות לצירים.

ב(1). מצאו את a .

ב(2). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ב(3). מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ב(4). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונות הפונקציות: $h(x) = |f(x)|$, $g(x) = -f(x+1)$.

ג(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ ואת תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$.

ג(2). האם שיעור ה- y של נקודת המקסימום של הפונקציה $g(x)$ גדול משיעור ה- y של נקודת המקסימום של הפונקציה $h(x)$, קטן ממנו או שווה לו? נמקו את התשובה.

נתון כי: $\int_1^3 h(x)dx = \int_0^k g(x)dx$, $k > 0$.

ד. מצאו את k . הסבירו את התשובה.

שאלה 7 · פונקציית שורש: חקירת פונקציית הנגזרת, קיצון בקצות התחום ושיפועי משיקים

נתונה הפונקציה: $f(x) = 5x + 3 \cdot \sqrt{x^2 + 4x}$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

א(3). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

א(4). מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם ציר ה- x .

א(5). סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, אם ידוע כי לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ אין נקודות קיצון.

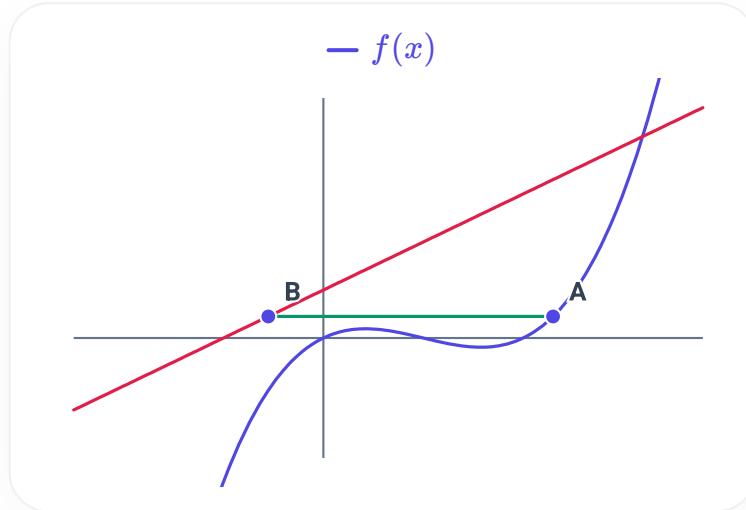
ב(1). מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

ב(2). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. האם ייתכן שיש שמשוואתו $y = 7x + c$ (פרמטר) ישיק לגרף הפונקציה $f(x)$? נמקו.

שאלה 8 · קטע אופקי בין גרף $x(x-1)(x-2)$ לישר: אורך מינימלי ומקסימלי בתחום סגור

בסרטוט שלפניכם מתוארים גרף הפונקציה: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ והישר $y = 2x + b$. הוא פרמטר חיובי. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ כך ששיעור ה- x שלה קטן משיעור ה- x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הישר הנתון. הנקודה B נמצאת על הישר הנתון כך שהקטע AB מקביל לציר ה- x . נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה A . נתון: $-1.5 \leq t \leq 2.5$.



א. הביעו באמצעות b ו- t את שיעור ה- x של הנקודה B .

ב(1). מצאו את הערך של t שבעבורו אורך הקטע AB הוא מינימלי.

ב(2). מצאו את הערך של t שבעבורו אורך הקטע AB הוא מקסימלי.

כל הבגריות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math