

מתכונת בגרות - שאלון 571

מבית GOOL בגריות ו-GuyAI

תלמידים ומורים יקרים,

לפניכם מתכונת שנבנתה בדיוק כמו בחינת הבגרות שמחכה לכם: אותו מבנה, אותם פרקים, אותה רמה ואותו ניקוד.

מתכונת ברמת בגרות. זו הבגרות כמו שהיא - לא קלה יותר ולא קשה יותר. היא מתאימה לחזרה הסופית בשבועות שלפני הבחינה, וזה הכלי הכי מדויק לבדוק אם התלמידים באמת מוכנים. מי שמסיים אותה בזמן ובציון טוב - מגיע לבגרות רגוע.

איך היא נולדה?

צוותי המורים של GOOL בגריות ו-GuyAI חיברו כוחות עם כלי הבינה המלאכותית המתקדמים ביותר שיש היום. ניתחנו כל בחינת בגרות בשאלון 571 מהשנים האחרונות: איזה פרק מופיע באיזו שאלה, איך בנויים הסעיפים ואיפה תלמידים נופלים. על הבסיס הזה בנינו מתכונת שנראית, מרגישה ונבחנת בדיוק כמו הבגרות האמיתית - אותו מבנה, אותם פרקים, אותה רמה ואותו ניקוד.

איך היא נבדקה?

כל שאלה עברה בדיקה עיוורת: פותר נוסף, שלא ראה את התשובות, פתר אותה מאפס. שאלה נכנסה למתכונת רק אם התשובה שלו זהה לשלנו, האיור תואם את הנתונים והרמה מתאימה - ובנוסף צוות המורים של GOOL בגריות עובר על המתכונות.

איך להפיק ממנה את המקסימום?

שבו לפתור בתנאי אמת - שיעון מול העיניים, בלי ספר ובלי טלפון. פתרו לפי הוראות הבחירה שבראש השאלות, בדיוק כמו בבגרות: חמש שאלות מתוך שמונה. בחרו מראש על אילו שאלות תענו - גם הבחירה היא חלק מהאימון. בסוף בדקו את עצמכם מול דף התשובות הסופיות, ובכל סעיף שבו טעיתם פתחו את הפתרון המלא: שם מוסבר כל צעד, וגם הטעות הנפוצה שכדאי להיזהר ממנה.

טיפ למורים: כיתה הטרוגנית? אפשר לתת את אותו מבנה בשלוש רמות - "בדרך לבגרות" למי שמתחזק, "ברמת בגרות" לרוב הכיתה ו"מעל רמת בגרות" לחזקים. כולם מתאמנים על אותם פרקים, כל אחד ברמה שמקדמת אותו.

לעוד מתכונות, לכל בחינות הבגרות מהשנים הקודמות ולפתרונות מלאים: www.guyai.co.il
בהצלחה בבגרות!

צוותי GOOL בגריות ו-GuyAI

סוג הבחינה: בחינת מתכונת
מועד הבחינה: מתכונת 12, ברמת בגרות
מספר השאלון: 035571
שם התלמיד/ה: _____

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות

א.

משך הבחינה: ארבע שעות ועשרים דקות.

ב.

מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון - שאלות קצרות

פרק שני - אינדוקצייה, סדרות והסתברות

פרק שלישי - גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

פרק רביעי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה - 22 נקודות).

סך הנקודות שתוכלו לצבור לא יעלה על 100.

ג.

חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

(2) דפי נוסחאות ל-5 יחידות לימוד.

ד.

הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.

(3) יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה - 22 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון - שאלות קצרות

בפרק זה שאלה 1. אפשר לבחור בה כאחת מחמש השאלות שעליכם לענות עליהן.

1. ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. נתון כי השוויון $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \dots + n \cdot 3^{n-1} = \frac{(2n-1) \cdot 3^n + 1}{b}$ מתקיים בעבור $n = 2$. b הוא פרמטר שונה מ-0.

(1) מצאו את הערך של b .

(2) הציבו $b = 4$ והוכיחו באינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי השוויון הנתון מתקיים לכל n טבעי.

ב. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$

המוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 4$.

אחד מן הביטויים I-IV שלפניכם מייצג את הפונקציה $f(x)$.

$$\text{I. } f(x) = (3-x)\sqrt{4x-x^2}$$

$$\text{II. } f(x) = (x-3)\sqrt{4x-x^2}$$

$$\text{III. } f(x) = (3-x)\sqrt{x^2-4x}$$

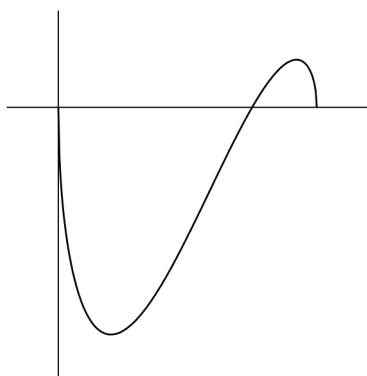
$$\text{IV. } f(x) = (x-3)\sqrt{x^2-4x}$$

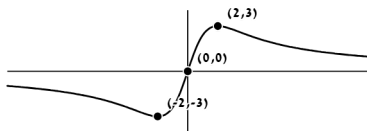
(1) קבעו איזה מן הביטויים מייצג את הפונקציה

$f(x)$. נמקו את קביעתכם.

נתונה הפונקציה $g(x) = (f(x))^2$ המוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 4$.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x .



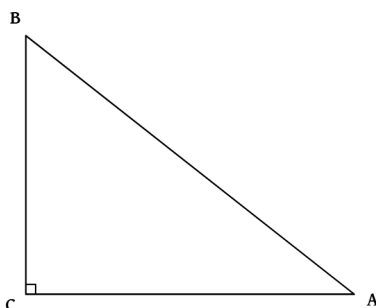


- ג. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x . לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות קיצון בלבד ואסימפטוטה אופקית אחת בלבד שמשוואתה היא $y = 0$. גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים, וזו נקודת החיתוך היחידה שלו עם הצירים. שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ מוצגים בסרטוט: $(-2, -3)$ ו- $(2, 3)$. נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)-2}$.

- (1) כמה אסימפטוטות המאונכות לציר ה- x יש לפונקציה $g(x)$? נמקו את תשובתכם.
- (2) מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה- y של הפונקציה $g(x)$.
- (3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

- ד. בסרטוט שלפניכם משולש ישר זווית ABC ($\angle ACB = 90^\circ$).

נתון כי אורכי צלעות המשולש הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית. האיבר השני בסדרה שווה לאורך הצלע AC . נתון: $AC = 6$.



- (1) האם ייתכן שהאיבר הראשון בסדרה שווה לאורך היתר AB ? נמקו את תשובתכם.
- (2) מצאו את היקף המשולש ABC (בתשובתכם תוכלו להשאיר שורש).

פרק שני - אינדוקצייה, סדרות והסתברות

בפרק זה השאלות 2-3. בחרו מהן שאלות כרצונכם - בסך הכול חמש שאלות מכל השאלון.

2. נתונה סדרה חשבונית: $a_1, a_2, \dots, a_{5n}$ שבה $5n$ איברים, וההפרש שלה הוא d . נסמן ב- S_n^* את הסכום של n האיברים האמצעיים של הסדרה.

א. הוכיחו כי: $S_n^* = \frac{1}{5} \cdot S_{5n}$.

ב. נתון כי האיבר הראשון של הסדרה הוא שלילי וכי הסכום של n האיברים האמצעיים שווה ל-0.

האם הפרש הסדרה הוא חיובי או שלילי? נמקו את תשובתכם.

ג. ידוע כי מתקיים: $a_1 = -22 \cdot |d|$.

מצאו את מספר האיברים בסדרה.

ד. מוחקים כמה מן האיברים בסדרה הנתונה, ונוצרת סדרה חשבונית חדשה:

$a_2, a_7, a_{12}, \dots, a_{5n-3}$. סכום האיברים של הסדרה החדשה הוא -27 .

מצאו את d .

3. מכשיר סריקה בשדה תעופה מצפצף כשהוא מזהה חפץ אסור. רק אחד מכל 500 נוסעים נושא חפץ

אסור. המכשיר אינו מושלם: הוא מצפצף על 95% מהנוסעים שנושאים חפץ אסור, ולא מצפצף

על 97% מהנוסעים שאינם נושאים חפץ כזה. כלומר, הוא מחטיא 5% מנושאי החפצים

האסורים, ומצפצף בטעות על 3% מהנוסעים האחרים.

א. לאור הידיעה שנשיאת חפצים אסורים נדירה ושהמכשיר אינו מושלם, מה ההסתברות שנוסע

שהמכשיר צפצף עליו אכן נושא חפץ אסור?

ב. ששה נוסעים נבחרו באקראי ועברו במכשיר:

(1) מה ההסתברות, ללא קשר למכשיר, שאף אחד מ-6 הנוסעים אינו נושא חפץ אסור?

(2) מה ההסתברות שהמכשיר לא יצפצף על אף אחד מ-6 הנוסעים?

ג. כיצד תשתנה תשובתך לסעיף א אם ידוע שהנוסע נבחר מקבוצה שבה אחד מכל עשרה נוסעים

נושא חפץ אסור?

פרק שלישי - גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

בפרק זה השאלות 4-5. בחרו מהן שאלות כרצונכם - בסך הכול חמש שאלות מכל השאלון.

4. משולש חד-זוויות ABC חסום במעגל שמרכזו O . הנקודה E

נמצאת על הצלע BC , והנקודה F נמצאת על הקטע BO , כמתואר בסרטוט. נתון כי המרובע $CEFO$ הוא בר חסימה במעגל.

א. הוכיחו: $EF = EB$.

ב. המעגל החוסם את המרובע $CEFO$ חותך את הצלע AC

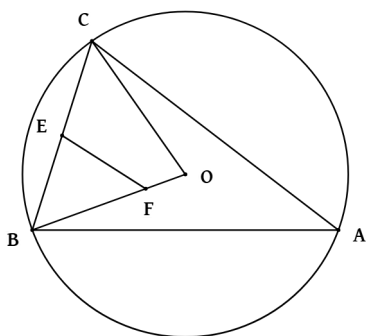
בנקודה D כך ש- ED מקביל ל- AB .

(1) הוכיחו: $OE \perp BC$.

(2) הוכיחו: $OD \perp AC$.

ג. הישר ℓ משיק בנקודה C למעגל החוסם את המשולש ABC .

הוכיחו כי הישר ℓ משיק למעגל החוסם את המרובע $CEFO$.



5. במעגל שרדיוסו R חסום משולש ABC . AF הוא

קוטר במעגל, והמשיק למעגל בנקודה F מקביל למיתר BC .

המשיקים למעגל בנקודות B ו- C נפגשים בנקודה E שעל המשך הקוטר AF (מעבר ל- F). BC ו- AF נפגשים בנקודה T .

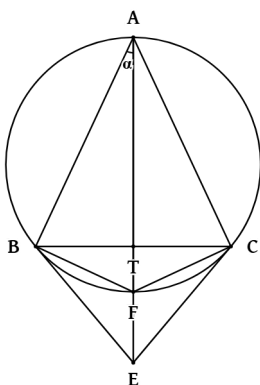
נתונה הזווית $\angle BAF = \alpha$ ($\alpha < 45^\circ$).

א. הביעו באמצעות α את $\angle BEF$. הסבירו בקצרה.

ב. הוכיחו כי $BE = R \tan 2\alpha$.

ג. מצאו את α שעבורה שטח המשולש BFC שווה לשטח המשולש BEF .

ד. עבור $\alpha = 30^\circ$, הביעו באמצעות R את שטח המרובע $ABEC$.



פרק רביעי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

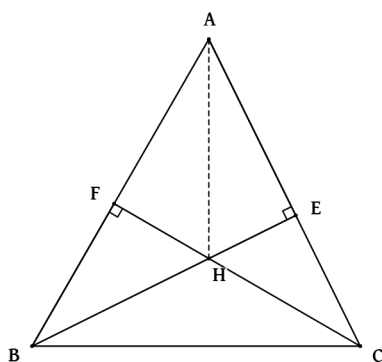
בפרק זה השאלות 6-8. בחרו מהן שאלות כרצונכם - בסך הכול חמש שאלות מכל השאלון.

6. ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי בעבור כל n טבעי מתקיים:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{3}$$

ב. במשולש חד-זווית ABC , הגבהים BE ו- CF נפגשים בנקודה H (ראו סרטוט). נתון: $BC = 12$, $AH = 8$.



(1) הוכיחו שאפשר לחסום במעגל כל אחד מן

המרובעים: $BCEF$, $AFHE$.

(2) מהו סכום השטחים של המעגלים החוסמים את

המרובעים: $BCEF$, $AFHE$?

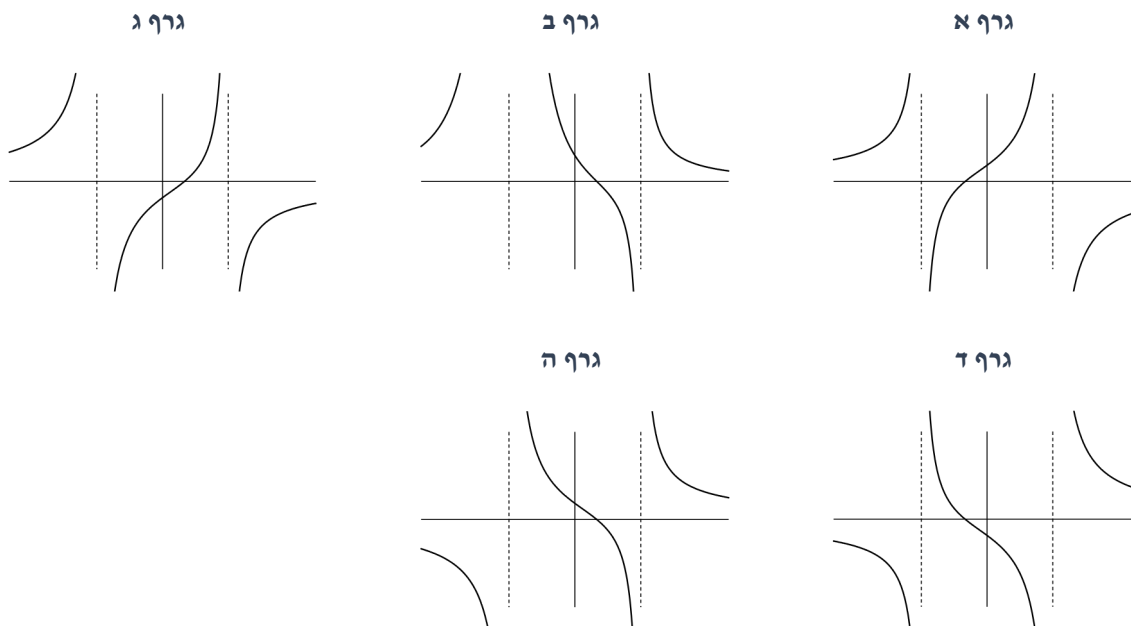
ג. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-2x-8}} + 1$.

(1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) ידוע כי האסימפטוטות של גרף הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים, חותכות זו את זו.

חשבו את השטח הכלוא בין האסימפטוטות. נמקו את התשובה.

ד. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a \cdot (x-1)}{x^2-9}$, המוגדרת עבור: $x \neq 3$ ו- $x \neq -3$, $a \neq 0$ הוא פרמטר. אחד מן הגרפים א-ה שלפניכם מתאים לפונקציה $f(x)$ בעבור $a > 0$, ואחד מהם מתאים לפונקציה $f(x)$ בעבור $a < 0$.



- (1) איזה מן הגרפים מתאים לפונקציה $f(x)$ בעבור $a > 0$? נמקו את התשובה בקצרה.
 (2) איזה מן הגרפים מתאים לפונקציה $f(x)$ בעבור $a < 0$? נמקו את התשובה בקצרה.

7. נתונה הפונקציה: $f(x) = \tan(x) - \frac{1}{x}$.

ענו על הסעיפים א-ב בעבור התחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה- x .
 ב. גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בתחום הנתון בשתי נקודות בלבד, ששיעורי ה- x שלהן הם 0.860 ו-3.426 בקירוב.
 מצאו את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של הפונקציה $f(x)$.
 ג. נתונה גם הפונקציה: $g(x) = x \cos(x)$, המוגדרת לכל x .
 האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי-זוגית, או לא זוגית ולא אי-זוגית? הוכיחו את תשובתכם.

- ד. (1) הראו כי בתחום $0 < x < 2\pi$ שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ שווים לשיעורי ה- x של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x , וקבעו את סוגן.

- (2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום: $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

8. נתונה הפונקציה: $f(x) = x\sqrt{a - x^2}$, $a > 0$ הוא פרמטר.

בסעיפים א-ה, בטאו את תשובותיכם באמצעות a לפי הצורך.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ב. הוכיחו שהפונקציה $f(x)$ אי-זוגית.

ג. (1) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים?

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה גם הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

(1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(2) מה הן משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$, אם יש כאלה?

ו. ידוע כי בכל אחת מנקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, יש לגרף של $f(x)$ ולגרף של $g(x)$ משיק משותף.

(1) הוסיפו לסרטוט שבמחברתכם סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$. פרטו את שיקוליכם.

(2) מהו הערך של a ? נמקו את תשובתכם.

עוד מתכונות, בגרורות ופתרונות מלאים: www.guyai.co.il