

מתכונת בגרות - שאלון 571

מבית GOOL בגריות ו-GuyAI

תלמידים ומורים יקרים,

לפניכם מתכונת שנבנתה בדיוק כמו בחינת הבגרות שמחכה לכם: אותו מבנה, אותם פרקים, אותה רמה ואותו ניקוד.

מתכונת ברמת בגרות. זו הבגרות כמו שהיא - לא קלה יותר ולא קשה יותר. היא מתאימה לחזרה הסופית בשבועות שלפני הבחינה, וזה הכלי הכי מדויק לבדוק אם התלמידים באמת מוכנים. מי שמסיים אותה בזמן ובציון טוב - מגיע לבגרות רגוע.

איך היא נולדה?

צוותי המורים של GOOL בגריות ו-GuyAI חיברו כוחות עם כלי הבינה המלאכותית המתקדמים ביותר שיש היום. ניתחנו כל בחינת בגרות בשאלון 571 מהשנים האחרונות: איזה פרק מופיע באיזו שאלה, איך בנויים הסעיפים ואיפה תלמידים נופלים. על הבסיס הזה בנינו מתכונת שנראית, מרגישה ונבחנת בדיוק כמו הבגרות האמיתית - אותו מבנה, אותם פרקים, אותה רמה ואותו ניקוד.

איך היא נבדקה?

כל שאלה עברה בדיקה עיוורת: פותר נוסף, שלא ראה את התשובות, פתר אותה מאפס. שאלה נכנסה למתכונת רק אם התשובה שלו זהה לשלנו, האירור תואם את הנתונים והרמה מתאימה - ובנוסף צוות המורים של GOOL בגריות עובר על המתכונות.

איך להפיק ממנה את המקסימום?

שבו לפתור בתנאי אמת - שיעון מול העיניים, בלי ספר ובלי טלפון. פתרו לפי הוראות הבחירה שבראש השאלות, בדיוק כמו בבגרות: חמש שאלות מתוך שמונה. בחרו מראש על אילו שאלות תענו - גם הבחירה היא חלק מהאימון. בסוף בדקו את עצמכם מול דף התשובות הסופיות, ובכל סעיף שבו טעיתם פתחו את הפתרון המלא: שם מוסבר כל צעד, וגם הטעות הנפוצה שכדאי להיזהר ממנה.

טיפ למורים: כיתה הטרוגנית? אפשר לתת את אותו מבנה בשלוש רמות - "בדרך לבגרות" למי שמתחזק, "ברמת בגרות" לרוב הכיתה ו"מעל רמת בגרות" לחזקים. כולם מתאמנים על אותם פרקים, כל אחד ברמה שמקדמת אותו.

לעוד מתכונות, לכל בחינות הבגרות מהשנים הקודמות ולפתרונות מלאים: www.guyai.co.il
בהצלחה בבגרות!

צוותי GOOL בגריות ו-GuyAI

סוג הבחינה: בחינת מתכונת
מועד הבחינה: מתכונת 15, ברמת בגרות
מספר השאלון: 035571
שם התלמיד/ה: _____

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות

א.

משך הבחינה: ארבע שעות ועשרים דקות.

ב.

מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון - שאלות קצרות

פרק שני - אינדוקצייה, סדרות והסתברות

פרק שלישי - גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

פרק רביעי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה - 22 נקודות).

סך הנקודות שתוכלו לצבור לא יעלה על 100.

ג.

חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

(2) דפי נוסחאות ל-5 יחידות לימוד.

ד.

הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.

(3) יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה - 22 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון - שאלות קצרות

בפרק זה שאלה 1. אפשר לבחור בה כאחת מחמש השאלות שעליכם לענות עליהן.

1. ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{4}{2 \cdot 3 \cdot 2^2} + \frac{5}{3 \cdot 4 \cdot 2^3} + \dots + \frac{n+2}{n(n+1) \cdot 2^n} = 1 - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n}$$

ב. בסרטוט שלפניכם טרפז ישר זווית ABCD ($AD \parallel BC$).

$\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$, האלכסון BD מאונך

לשוק CD. אורך השוק CD גדול פי 1.5 מאורך הבסיס AD.

נסמן: $\angle ADB = \alpha$.

(1) מצאו את הערך של α .

נתון: $AB = 6$.

(2) חשבו את שטח הטרפז ABCD.

ג. נתונות הפונקציות $f(x) = x^n(x-1)(x+2)$ ו- $g(x) = x^n(x+1)(x-2)$,

המוגדרות לכל x . n הוא פרמטר טבעי גדול מ-1. כל אחד מן הגרפים I-IV לפניכם מייצג

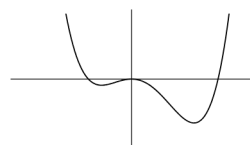
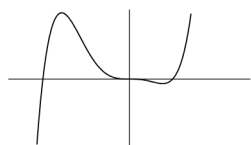
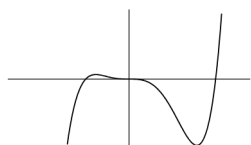
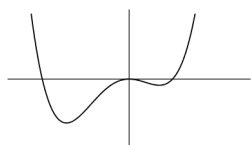
אחת מן הפונקציות בעבור n זוגי או n אי-זוגי.

גרף IV

גרף III

גרף II

גרף I

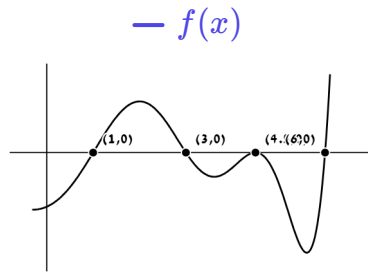


(1) התאימו לכל אחד מן הגרפים I-IV את הפונקציה, $f(x)$ או $g(x)$, המתאימה לו

בעבור n זוגי או n אי-זוגי.

(2) הציבו $n = 2$ וחשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה-

x .



ד. בסרטוט שלפניכם מתוארת הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x . בסרטוט מצוינים כל שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x . פונקציה $g(x)$ מוגדרת בתחום $x \geq 0$, ומקיימת

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt$$

(1) מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה

$f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי ציר ה- y . נתון: $g(3) = S$, $g(6) = -2S$.

(2) הביעו באמצעות S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x , בתחום $0 \leq x \leq 6$.

פרק שני - אינדוקצייה, סדרות והסתברות

בפרק זה השאלות 2-3. בחרו מהן שאלות כרצונכם - בסך הכול חמש שאלות מכל השאלון.

2. הסדרה $a_1, a_2, a_3, \dots$ מוגדרת על ידי כלל הנסיגה:

$$\begin{cases} S_1 = -1 \\ S_{n+1} = S_n + 5n - 1 \end{cases}$$

כאשר $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$.

א. הוכיחו שהסדרה $a_1, a_2, a_3, \dots$ היא חשבונית.

ב. מגדירים סדרה נוספת: $b_{n+1} - b_n = a_n$.

חשבו את הסכום הבא (רשמו את תשובתכם כשבר, או בדיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית):

$$\frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} + \frac{b_3 - b_2}{a_2 - a_3} + \dots + \frac{b_{25} - b_{24}}{a_{24} - a_{25}}$$

3. בבית חולים גדול מאוד, מספר האחיות והאחים גדול פי 4 ממספר הרופאים. בבית החולים נערך סקר שהשתתפו בו כל הרופאים וכל האחיות והאחים, והם בלבד. המשתתפים נשאלו אם קיבלו חיסון נגד שפעת. נמצא כי 75% מן הרופאים קיבלו חיסון. כמו כן נמצא כי $\frac{5}{8}$ מכלל המשתתפים שקיבלו חיסון היו אחיות או אחים.

א. מהי ההסתברות שמבין כלל המשתתפים בסקר ייבחר באקראי אח או אחות שלא קיבלו חיסון?

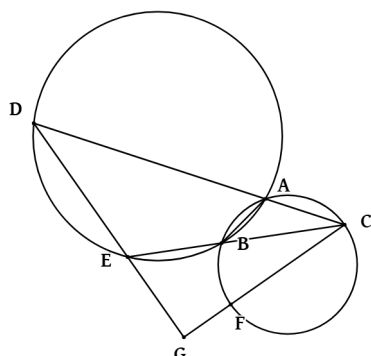
ב. בוחרים באקראי, בזה אחר זה, 5 משתתפים מבין כלל משתתפי הסקר. מהי ההסתברות שלפחות 3 מהם קיבלו חיסון?

ג. ידוע כי מבין החמישה שנבחרו, לפחות משתתף אחד קיבל חיסון. מהי ההסתברות שלפחות 3 מן המשתתפים שנבחרו קיבלו חיסון?

ד. ידוע כי מבין החמישה שנבחרו, בדיוק 3 קיבלו חיסון. מהי ההסתברות שהאחרון שנבחר קיבל חיסון?

פרק שלישי - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

בפרק זה השאלות 4-5. בחרו מהן שאלות כרצונכם - בסך הכול חמש שאלות מכל השאלון.



4. שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B. C היא נקודה על המעגל הימני. המשכי הקטעים CA ו-CB חותכים את המעגל השמאלי בנקודות D ו-E בהתאמה. הנקודה F נמצאת על הקשת BC, כמתואר בסרטוט. המשכי הקטעים DE ו-CF נפגשים בנקודה G.

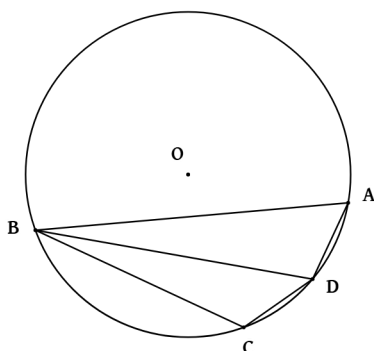
א. הוכיחו: $\angle DEB = \angle CAB$.

ב. הוכיחו: המרובע GEBF הוא בר חסימה במעגל.

ג. נתון: $AB = BF$.

הוכיחו: $\frac{CG}{CD} = \frac{GE}{DE}$.

- ד. נתון: CF הוא קוטר במעגל הימני, $DE = 10$, $CD = 20$. חשבו את אורכי הקטעים EG ו-CG.



5. מרובע ABCD חסום במעגל שרדיוסו R ומרכזו O (ראו סרטוט). נסמן: $\angle DAB = \alpha$, היא זווית חדה.

א. הביעו את אורך האלכסון BD באמצעות α ו-R.

- ב. נתון: $BC = R\sqrt{2}$, $CD = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. חשבו את α .

ג. נתון: BD הוא חוצה זווית ABC.

חשבו את גודל הזווית ABD.

- ד. נסמן ב- h_1 את הגובה שיורד מקודקוד A במשולש ABD,

וב- h_2 את הגובה שיורד מקודקוד O במשולש BOD.

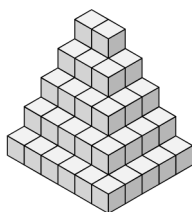
חשבו את $\frac{h_1}{h_2}$.

פרק רביעי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

בפרק זה השאלות 6-8. בחרו מהן שאלות כרצונכם - בסך הכול חמש שאלות מכל השאלון.

6. ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. נתון מרובע ABCD שבו גודלי הזוויות מהווים סדרה חשבונית עולה. איברי הסדרה הם: a_1, a_2, a_3, a_4 . הוכיחו כי אם מתקיים: $\angle A = a_1$, $\angle B = a_2$, $\angle C = a_3$, $\angle D = a_4$ אז המרובע ABCD הוא טרפז.



ב. נתון מגדל קוביות ובו 5 קומות (ראו ציור). הקומה התחתונה בנויה מ-30 קוביות המסודרות בצורת מלבן של 5×6 קוביות. הקומה שמעליה בנויה מ-20 קוביות המסודרות בצורת מלבן של 4×5 קוביות. וכך הלאה עד לקומה העליונה, שבה יש 2 קוביות (1×2). תוכלו להיעזר בנוסחה (לכל n טבעי):

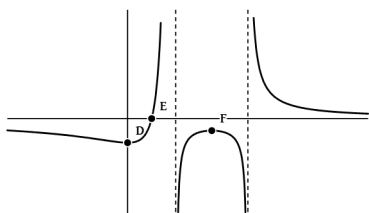
$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

(1) כמה קוביות סך הכול דרושות כדי לבנות באותו אופן מגדל שבו 8 קומות?

(2) נתון מגדל ובו 12 קומות הבנוי באותו אופן שבו בנוי המגדל המתואר בתחילת סעיף ב.

כמה קוביות צריך להוסיף למגדל זה, כדי שיהיה בו 60 קומות הבנויות באותו אופן? פרטו את חישוביכם.

ג. נתונה הפונקציה: $f(x) = \left[\sin(x + \pi) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right]^2 + 4(\cos(-x))^2 - 3$ המוגדרת לכל x . האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות חיתוך עם ציר ה- x ? נמקו את תשובתכם.



ד. הגרף שלפניכם מתאר את הפונקציה $h(x)$ שתחום

ההגדרה שלה הוא: $x \neq 2$, $x \neq 5$. הישרים:

$y = 0$, $x = 5$, $x = 2$ הם אסימפטוטות של

הפונקציה $h(x)$. הנקודה $D(0, -1)$ היא נקודת

המינימום היחידה של הפונקציה $h(x)$, הנקודה

$F(3.5, -0.5)$ היא נקודת המקסימום היחידה של

הפונקציה $h(x)$, והנקודה $E(1, 0)$ היא נקודת

החיתוך היחידה של גרף הפונקציה $h(x)$ עם ציר ה- x .

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה: $\frac{1}{h(x)}$.

(2) בכמה נקודות נפגשים הגרף של $h(x)$ והגרף של $\frac{1}{h(x)}$? נמקו את תשובתכם.

7. נתונות הפונקציות $g(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x - 1}}$, $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{2 \cos x - 1}}$.

א. ענו על סעיף א עבור התחום: $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את המשוואות של האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה- x .

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. ענו גם על סעיף ב עבור התחום: $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) הוכיחו: $g(x) = -f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

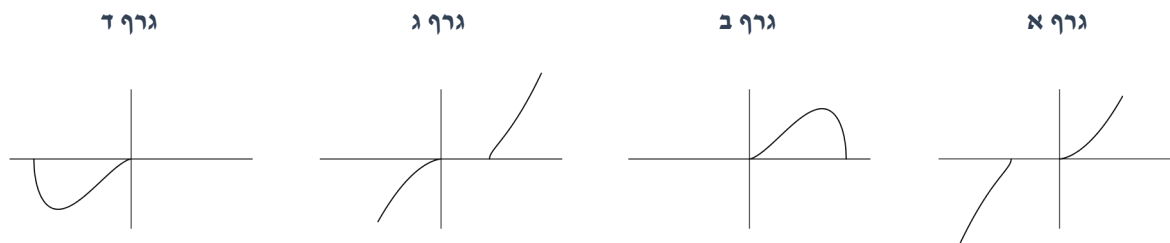
ג. מצאו את ערך הביטוי $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(x) dx$. נמקו את תשובתכם.

8. נתונות ארבע פונקציות: $g(x) = x\sqrt{2x - x^2}$, $f(x) = x\sqrt{x^2 - 2x}$,

$k(x) = x\sqrt{-x^2 - 2x}$, $h(x) = x\sqrt{x^2 + 2x}$.

א. רשמו את תחום ההגדרה של כל אחת מהפונקציות.

ב. נתונים גם ארבעה גרפים:



התאימו בין הגרפים לפונקציות. נמקו את ההתאמה.

ג. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x) = x\sqrt{2x - x^2}$ וקבעו את סוגן.

ד. השטח המוגבל בין הגרף של $g(x)$ לבין ציר ה- x מסתובב סביב ציר ה- x . מהו נפח גוף הסיבוב?

עוד מתכונות, בגרונות ופתרונות מלאים: www.guyai.co.il