

## מתכונת בגרות - שאלון 571

מבית GOOL בגריות ו-GuyAI

תלמידים ומורים יקרים,

לפניכם מתכונת שנבנתה בדיוק כמו בחינת הבגרות שמחכה לכם: אותו מבנה, אותם פרקים, אותה רמה ואותו ניקוד.

**מתכונת ברמת בגרות.** זו הבגרות כמו שהיא - לא קלה יותר ולא קשה יותר. היא מתאימה לחזרה הסופית בשבועות שלפני הבחינה, וזה הכלי הכי מדויק לבדוק אם התלמידים באמת מוכנים. מי שמסיים אותה בזמן ובציון טוב - מגיע לבגרות רגוע.

### איך היא נולדה?

צוותי המורים של GOOL בגריות ו-GuyAI חיברו כוחות עם כלי הבינה המלאכותית המתקדמים ביותר שיש היום. ניתחנו כל בחינת בגרות בשאלון 571 מהשנים האחרונות: איזה פרק מופיע באיזו שאלה, איך בנויים הסעיפים ואיפה תלמידים נופלים. על הבסיס הזה בנינו מתכונת שנראית, מרגישה ונבחנת בדיוק כמו הבגרות האמיתית - אותו מבנה, אותם פרקים, אותה רמה ואותו ניקוד.

### איך היא נבדקה?

כל שאלה עברה בדיקה עיוורת: פותר נוסף, שלא ראה את התשובות, פתר אותה מאפס. שאלה נכנסה למתכונת רק אם התשובה שלו זהה לשלנו, האיור תואם את הנתונים והרמה מתאימה - ובנוסף צוות המורים של GOOL בגריות עובר על המתכונות.

### איך להפיק ממנה את המקסימום?

שבו לפתור בתנאי אמת - שעון מול העיניים, בלי ספר ובלי טלפון. פתרו לפי הוראות הבחירה שבראש השאלות, בדיוק כמו בבגרות: חמש שאלות מתוך שמונה. בחרו מראש על אילו שאלות תענו - גם הבחירה היא חלק מהאימון. בסוף בדקו את עצמכם מול דף התשובות הסופיות, ובכל סעיף שבו טעיתם פתחו את הפתרון המלא: שם מוסבר כל צעד, וגם הטעות הנפוצה שכדאי להיזהר ממנה.

**טיפ למורים:** כיתה הטרוגנית? אפשר לתת את אותו מבנה בשלוש רמות - "בדרך לבגרות" למי שמתחזק, "ברמת בגרות" לרוב הכיתה ו"מעל רמת בגרות" לחזקים. כולם מתאמנים על אותם פרקים, כל אחד ברמה שמקדמת אותו.

לעוד מתכונות, לכל בחינות הבגרות מהשנים הקודמות ולפתרונות מלאים: [www.guyai.co.il](http://www.guyai.co.il)  
בהצלחה בבגרות!

**צוותי GOOL בגריות ו-GuyAI**

סוג הבחינה: בחינת מתכונת  
מועד הבחינה: מתכונת 16, ברמת בגרות  
מספר השאלון: 035571  
שם התלמיד/ה: \_\_\_\_\_

## מתמטיקה

### 5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

#### הוראות

א.

משך הבחינה: ארבע שעות ועשרים דקות.

ב.

מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון - שאלות קצרות

פרק שני - אינדוקצייה, סדרות והסתברות

פרק שלישי - גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

פרק רביעי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה - 22 נקודות).

סך הנקודות שתוכלו לצבור לא יעלה על 100.

ג.

חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

(2) דפי נוסחאות ל-5 יחידות לימוד.

ד.

הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.

(3) יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

**בהצלחה!**

## השאלות

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה - 22 נקודות).

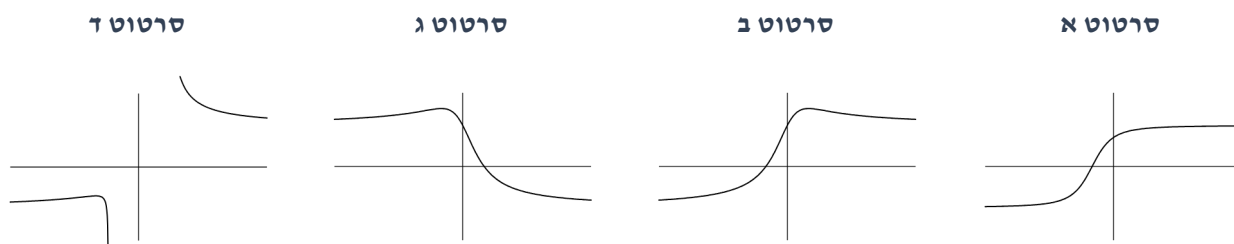
**שימו לב:** אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

### פרק ראשון - שאלות קצרות

בפרק זה שאלה 1. אפשר לבחור בה כאחת מחמש השאלות שעליכם לענות עליהן.

**1.** ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

הסרטטים לסעיף ד:



**א.** הוכיחו כי כל מקבילית שחסומה במעגל היא מלבן.

**ב.** הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת שהביטוי  $n^3 + 5n$  מתחלק ב-6 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.

**ג.** נתון כי הפונקציה  $f(x)$  אינה קבועה, מוגדרת לכל  $x$  והיא אי-זוגית.

קבעו לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות אם היא זוגית, אי-זוגית, לא זוגית ולא אי-זוגית או שלא ניתן לקבוע. נמקו.

$$I. h(x) = x \cdot f(x)$$

$$II. k(x) = x^2 \cdot f(x)$$

$$III. g(x) = f(x) + x^2$$

**ד.** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+a}}$ ,  $a > 0$ . אילו מהסרטטים א-ד הוא גרף הפונקציה? נמקו בקצרה.

## פרק שני - אינדוקצייה, סדרות והסתברות

בפרק זה השאלות 2-3. בחרו מהן שאלות כרצונכם - בסך הכול חמש שאלות מכל השאלון.

2. נתונה סדרה  $a_n$  שסכום  $n$  האיברים הראשונים שלה, לכל  $n$  טבעי, הוא:

$$S_n = p \cdot n - k \cdot n^2, \quad p > 0, \quad k > 0.$$

א. (1) הביעו את האיבר הכללי של הסדרה באמצעות  $k$ ,  $p$  ו- $n$ , בעבור  $n \geq 2$ .

(2) הנוסחה שמצאתם בתת-סעיף א(1) נכונה בעבור כל  $n$  טבעי. הסבירו מדוע.

(3) הוכיחו כי הסדרה היא סדרה חשבונית, והביעו את  $d$ , ההפרש של הסדרה, באמצעות  $k$ .

ב. נתונות שתי סדרות הנדסיות  $b_n$  ו- $c_n$ . מנת הסדרה  $b_n$  שווה ל- $d$  (הפרש הסדרה

החשבונית  $a_n$ ). הסדרה  $c_n$  היא סדרה הנדסית אינסופית שהמנה שלה שווה ל- $\frac{1}{d}$ . נתון:

$$a_1 = b_1 = c_1, \quad k = 1, \quad p = 4.$$

הסבירו מדוע הסדרה  $c_n$  היא סדרה מתכנסת.

ג. נתון כי היחס בין סכום  $m$  האיברים הראשונים של הסדרה  $b_n$  ובין סכום כל איברי הסדרה

$$c_n \text{ הוא } 64\frac{1}{2}.$$

חשבו את  $m$ .

ד. האם הסדרה  $c_n$  היא סדרה עולה, סדרה יורדת או סדרה לא עולה ולא יורדת? נמקו את תשובתכם.

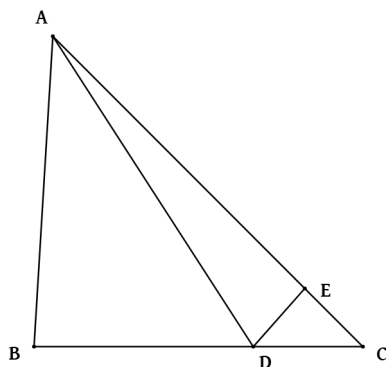
3. בחברה גדולה, חלק מהעובדים עובדים בסניף הצפוני של החברה, וחלקם עובדים בסניף הדרומי.
- א. מבין העובדים בסניף הדרומי, חלק מגיעים לעבודה ברכב פרטי וחלק אחר אינם מגיעים ברכב פרטי. מבין העובדים בסניף הצפוני כל העובדים מגיעים לעבודה ברכב פרטי. לפניכם טבלת הסתברויות לא מלאה המתאימה לנתונים.

|                              | עובדים<br>בסניף<br>הדרומי | עובדים<br>בסניף<br>הצפוני |  |
|------------------------------|---------------------------|---------------------------|--|
| מגיעים<br>ברכב<br>פרטי       |                           |                           |  |
| לא<br>מגיעים<br>ברכב<br>פרטי |                           | 0                         |  |
| סה"כ                         |                           |                           |  |

- האם ייתכן שהמאורעות "עובד בסניף הדרומי" ו"מגיע לעבודה ברכב פרטי" יהיו בלתי תלויים?
- ב. נתון גם ש-15% מעובדי החברה אינם מגיעים לעבודה ברכב פרטי. בוחרים באופן אקראי 4 עובדים מהחברה לוועדה. מה ההסתברות שבדיוק שניים מהם עובדים בסניף הדרומי ואינם מגיעים לעבודה ברכב פרטי?

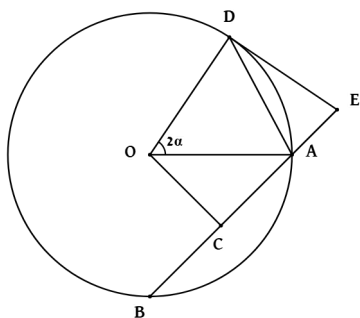
## פרק שלישי - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

בפרק זה השאלות 4-5. בחרו מהן שאלות כרצונכם - בסך הכול חמש שאלות מכל השאלון.



4. במשולש  $\triangle ABC$  הנקודה  $D$  נמצאת על הצלע  $BC$  כך ש-  $BD = 2DC$ . הנקודה  $E$  נמצאת על הצלע  $AC$  כך שהמרובע  $ABDE$  הוא בר חסימה במעגל.

- הוכיחו:  $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ .
- נתון גם:  $\frac{AE}{EC} = \frac{13}{3}$ . חשבו את היחס  $\frac{BC}{AC}$ .
- נתון כי שטח המשולש  $\triangle DEC$  הוא  $S$ . הביעו באמצעות  $S$  את שטח המרובע  $ABDE$ .



5. נתון מעגל שמרכזו  $O$  והרדיוס שלו  $R$ . מנקודה  $E$ , הנמצאת מחוץ למעגל, העבירו ישר החותך את המעגל בנקודות  $A$  ו-  $B$ , כמתואר בסרטוט. הנקודה  $D$  נמצאת על הקשת הגדולה  $AB$ , כך שהקטע  $ED$  משיק למעגל. הנקודה  $C$  היא אמצע המיתר  $AB$ . נסמן את הזווית בין הרדיוסים  $OA$  ו-  $OD$  ב-  $2\alpha$  ( $\alpha \leq 67.5^\circ$ ). נתון: אורך המיתר  $AB$  הוא  $R\sqrt{2}$ .

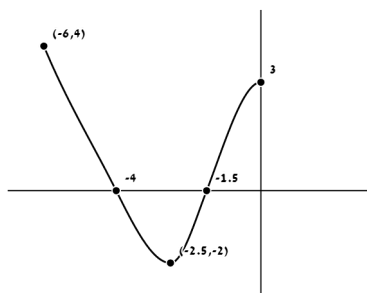
- מצאו את זווית המרובע  $DOCE$ . הביעו באמצעות  $\alpha$  אם יש צורך.
- הביעו באמצעות  $R$  ו-  $\alpha$  את אורך הקטע  $DE$ .
- נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש  $AOD$  הוא  $\frac{5}{8}R$ . מצאו את  $\alpha$ .
- מצאו את היחס בין שטח המעגל החוסם את המרובע  $DOCE$  ובין שטח המעגל הנתון.

## פרק רביעי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

בפרק זה השאלות 6-8. בחרו מהן שאלות כרצונכם - בסך הכול חמש שאלות מכל השאלון.

6. הפונקציה  $f(x)$  זוגית ומוגדרת לכל  $x$ .

$-f(x)$



לפניכם הגרף של  $f(x)$  בתחום:  $-6 < x < 0$ .

(בגרף מסומנים: נקודות החיתוך עם ציר ה- $x$  ב- $x = -4$  וב- $x = -\frac{3}{2}$ , נקודת המינימום  $(-\frac{5}{2}, -2)$ , הנקודה  $(0, 3)$ , ו- $f(-6) = 4$ .  $f$  יורדת ב- $-\frac{5}{2} < x < -6$  ועולה ב- $-\frac{5}{2} < x < 0$ .)

א. סרטטו את הגרף של הפונקציה  $\frac{1}{f(x)}$  בתחום

$-6 < x < 6$  ורשמו את שיעורי נקודות הקיצון של

$\frac{1}{f(x)}$  בתחום זה ואת האסימפטוטות המקבילות

לצירים (אם הן קיימות).

עבור הסעיפים הבאים ידוע בנוסף כי עבור פונקציה נוספת  $g(x)$  מתקיים:

$$-f(x) = g'(x)$$

ב. סרטטו את הגרף השלם של הפונקציה  $g'(x)$ . פרטו בקצרה את שיקוליכם.

ג. היעזרו בנתונים שבסרטוט, רשמו את שיעורי ה- $x$  של נקודות הקיצון של  $g(x)$  וקבעו את סוגן. נמקו בקצרה.

ד. היעזרו בנתונים שבסרטוט ורשמו את תחומי הקעירות כלפי מעלה של  $g(x)$ . נמקו בקצרה.

ה. סרטטו גרף עבור  $g''(x)$  (הנגזרת השנייה של  $g(x)$ ). נמקו בקצרה.

ו. מהו גודל השטח הכלוא בין הגרף של  $g''(x)$  לבין ציר ה- $x$  ברביעי הרביעי (בתחום  $-6 < x < 6$ )? נמקו.

7. נתונה הפונקציה  $f(x) = 16 \cos x + \frac{1}{\cos^2 x}$  בתחום  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לציר ה- $x$  של הפונקציה  $f(x)$ .

ב. קבעו אם הפונקציה  $f(x)$  היא זוגית או אי-זוגית. נמקו את קביעתכם.

ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ה. נתונה הפונקציה  $g(x) = 16 \cos x + \frac{2 \tan x}{\sin(2x)}$  בתחום  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$ .

(2) הראו כי  $g(x) = 16 \cos x + \frac{1}{\cos^2 x}$  בעבור כל  $x$  בתחום הגדרתה.

ו. האם קיים ערך של  $k$  שבעבורו הישר  $y = k$  חותך את גרף הפונקציה  $g(x)$  ב-3 נקודות בדיוק? אם כן, מצאו אותו. אם לא, נמקו את תשובתכם.

8. בסרטוט שלפניכם מוצגת הפונקציה:

$f(x) = \sqrt{ax^3 + bx^6}$ . נתון שתחום ההגדרה של

הפונקציה  $f(x)$  הוא:  $0 \leq x \leq 2$ .

א. (1) הוכיחו כי  $a = -8b$ .

(2) לפניכם שתי טענות I-II. רק אחת מהן נכונה. קבעו

מהי הטענה הנכונה, ונמקו את קביעתכם.

I.  $b < 0$ ,  $a > 0$ .

II.  $b > 0$ ,  $a < 0$ .

ב. הנקודה  $P$  נמצאת על גרף הפונקציה  $(f(x))^2$  המוגדרת גם היא בתחום:  $0 \leq x \leq 2$ .

מהנקודה  $P$  מעבירים ישר המאונך לציר ה- $x$ .  $M$  היא נקודת החיתוך של האנך עם ציר

ה- $x$ , ו- $O$  היא ראשית הצירים.

מהו שיעור ה- $x$  של הנקודה  $P$  שבעבורו שטח המשולש  $PMO$  הוא מקסימלי? נמקו את תשובתכם.

ג. בעבור שיעור ה- $x$  שמצאת בסעיף ב, בטאו באמצעות  $a$  את השטח המקסימלי של המשולש  $PMO$ .

ד. אם ידוע כי שיעור ה- $x$  של הנקודה  $P$  נמצא בתחום שבו הפונקציה  $(f(x))^2$  אינה יורדת, מהו שיעור ה- $x$  של הנקודה  $P$  שבעבורו שטח המשולש  $PMO$  הוא מקסימלי? נמקו את תשובתכם.