

מתכונת בגרות - שאלון 571

חבית GOOL בגריות ו-GuyAI

תלמידים ומורים יקרים,

לפניכם מתכונת שנבנתה בדיוק כמו בחינת הבגרות שמחכה לכם: אותו מבנה, אותם פרקים, אותה רמה ואותו ניקוד.

מתכונת ברמת בגרות. זו הבגרות כמו שהיא - לא קלה יותר ולא קשה יותר. היא מתאימה לחזרה הסופית בשבועות שלפני הבחינה, וזה הכלי הכי מדויק לבדוק אם התלמידים באמת מוכנים. מי שמסיים אותה בזמן ובציון טוב - מגיע לבגרות רגוע.

איך היא נולדה?

צוותי המורים של GOOL בגריות ו-GuyAI חיברו כוחות עם כלי הבינה המלאכותית המתקדמים ביותר שיש היום. ניתחנו כל בחינת בגרות בשאלון 571 מהשנים האחרונות: איזה פרק מופיע באיזו שאלה, איך בנויים הסעיפים ואיפה תלמידים נופלים. על הבסיס הזה בנינו מתכונת שנראית, מרגישה ונבחנת בדיוק כמו הבגרות האמיתית - אותו מבנה, אותם פרקים, אותה רמה ואותו ניקוד.

איך היא נבדקה?

כל שאלה עברה בדיקה עיוורת: פותר נוסף, שלא ראה את התשובות, פתר אותה מאפס. שאלה נכנסה למתכונת רק אם התשובה שלו זהה לשלנו, האירור תואם את הנתונים והרמה מתאימה - ובנוסף צוות המורים של GOOL בגריות עובר על המתכונות.

איך להפיק ממנה את המקסימום?

שבו לפתור בתנאי אמת - שעון מול העיניים, בלי ספר ובלי טלפון. פתרו לפי הוראות הבחירה שבראש השאלות, בדיוק כמו בבגרות: חמש שאלות מתוך שמונה. בחרו מראש על אילו שאלות תענו - גם הבחירה היא חלק מהאימון. בסוף בדקו את עצמכם מול דף התשובות הסופיות, ובכל סעיף שבו טעיתם פתחו את הפתרון המלא: שם מוסבר כל צעד, וגם הטעות הנפוצה שכדאי להיזהר ממנה.

טיפ למורים: כיתה הטרונגית? אפשר לתת את אותו מבנה בשלוש רמות - "בדרך לבגרות" למי שמתחזק, "ברמת בגרות" לרוב הכיתה ו"מעל רמת בגרות" לחזקים. כולם מתאמנים על אותם פרקים, כל אחד ברמה שמקדמת אותו.

לעוד מתכונות, לכל בחינות הבגרות מהשנים הקודמות ולפתרונות מלאים: www.guyai.co.il
בהצלחה בבגרות!

צוותי GOOL בגריות ו-GuyAI

סוג הבחינה: בחינת מתכונת
מועד הבחינה: מתכונת 17, ברמת בגרות
מספר השאלון: 035571
שם התלמיד/ה: _____

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות

א.

משך הבחינה: ארבע שעות ועשרים דקות.

ב.

מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון - שאלות קצרות

פרק שני - אינדוקצייה, סדרות והסתברות

פרק שלישי - גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

פרק רביעי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה - 22 נקודות).

סך הנקודות שתוכלו לצבור לא יעלה על 100.

ג.

חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

(2) דפי נוסחאות ל-5 יחידות לימוד.

ד.

הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.

(3) יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה - 22 נקודות).

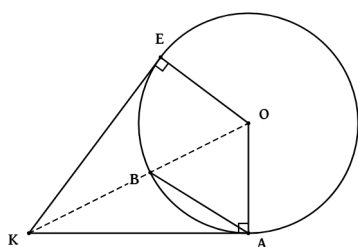
שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון - שאלות קצרות

בפרק זה שאלה 1. אפשר לבחור בה כאחת מחמש השאלות שעליכם לענות עליהן.

1. ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O ורדיוסו R . דרך הנקודות A ו- E שעל המעגל העבירו שני משיקים, הנחתכים בנקודה K . אורך המשיק KA גדול פי 2 מרדיוס המעגל. הקטע KO חותך את המעגל בנקודה B .



(1) מצאו פי כמה גדול שטח המשולש AKB משטח המשולש AOB .

נתון כי שטח המשולש AOB הוא 10.

(2) מצאו את אורך הגובה לצלע AK במשולש AKB .

- ב. קשת יורה חצים במטרה. כל חץ פוגע במרכז המטרה, פוגע בטבעת החיצונית של המטרה או מחטיא את המטרה. ההסתברות שחץ יפגע בטבעת החיצונית קבועה וגדולה פי 4 מן ההסתברות שהוא יפגע במרכז המטרה. נסמן ב- p את ההסתברות שחץ יפגע במרכז המטרה. הקשת יורה שני חצים, והתוצאות של חצים שונים בלתי תלויות זו בזו.

(1) הביעו באמצעות p את ההסתברות שאחד החצים יפגע במרכז המטרה והחץ האחר יפגע בטבעת החיצונית.

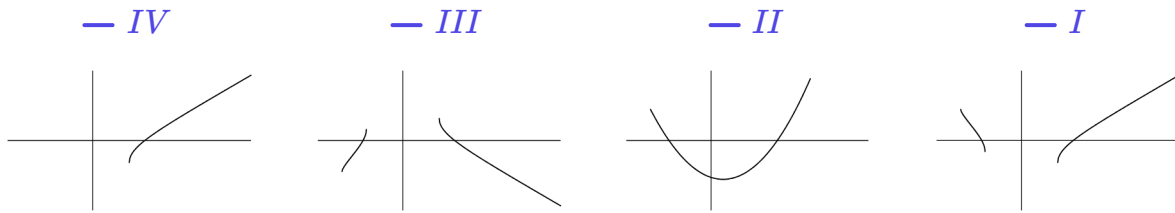
ידוע שאם לא קרה המאורע שבסעיף ב(1), ההסתברות ששני החצים יחטיאו את המטרה היא $\frac{25}{92}$.

(2) קבעו איזו מן האפשרויות I-III שלפניכם מתאימה לערך של p . נמקו את קביעתכם.

$$\text{I. } \frac{67}{250} \quad \text{II. } \frac{1}{10} \quad \text{III. } \frac{1}{20}$$

ג. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{x^2 - 9} - \sqrt{x + 5}$.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.



(2) אחד מן הגרפים I-IV מתאר את הפונקציה $f(x)$. קבעו איזה מהם ונמקו את קביעתכם.

ד. נתונה סדרה אין-סופית שאיבריה מקיימים: $a_n = \frac{\cos\left(\frac{4^n \pi}{3}\right)}{3^n}$ לכל n טבעי.

(1) מצאו את שלושת האיברים הראשונים בסדרה a_n .

(2) הוכיחו כי הסדרה a_n היא הנדסית, ומצאו את המנה שלה.

(3) מצאו את סכום הסדרה a_n .

פרק שני - אינדוקצייה, סדרות והסתברות

בפרק זה השאלות 2-3. בחרו מהן שאלות כרצונכם - בסך הכול חמש שאלות מכל השאלון.

2. נתונה סדרה הנדסית אין-סופית a_n שאיבריה: $a_1, a_2, a_3, \dots$ והמנה שלה q .

א. הביעו באמצעות q ו- a_1 את ערכי הסכומים שלפניכם.

$$A = a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{36} \quad (1)$$

$$B = a_6 + a_{12} + a_{18} + \dots + a_{36} \quad (2)$$

ב. נתון כי בסדרה a_n סימני האיברים מתחלפים, וכי: $\frac{A}{B} = \frac{21}{16}$.

מצאו את ערכו של q .

ג. בונים מן הסדרה a_n הנתונה סדרה הנדסית אין-סופית b_n המקיימת לכל n טבעי:

$$b_n = 2a_{n+2}$$

מצאו את המנה של הסדרה b_n .

ד. בונים סדרה הנדסית אין-סופית חדשה: $-\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, -\frac{1}{b_3}, \frac{1}{b_4}, \dots$

הביעו את הסכום של כל איברי הסדרה החדשה באמצעות a_1 .

ה. נתונה הסדרה: $\frac{1}{a_1}, a_1, b_1$.

(1) האם ייתכן שסדרה זו חשבונית? נמקו את תשובתכם.

(2) האם ייתכן שסדרה זו הנדסית? נמקו את תשובתכם.

3. בבית ספר מסוים נערך סקר בנוגע להארכת יום הלימודים. בסקר השתתפו תלמידים ומורים בלבד.

כל משתתף הצביע בעד הארכת יום הלימודים או נגדה (לא היו נמנעים). כל המורים שהשתתפו

בסקר הצביעו נגד.

בוחרים באקראי משתתף אחד מבין המשתתפים בסקר.

נסמן ב- p את ההסתברות שהמשתתף שנבחר הוא מורה.

נסמן ב- k את ההסתברות שהמשתתף שנבחר הצביע בעד.

א. הביעו באמצעות p ו- k את ההסתברות שהמשתתף שנבחר הוא תלמיד שהצביע נגד.

ב. $\frac{3}{5}$ מן התלמידים שהשתתפו בסקר הצביעו בעד. $\frac{5}{11}$ מן המשתתפים שהצביעו נגד היו מורים.

מצאו את p ואת k .

ג. בוחרים באקראי 5 מן התלמידים שהשתתפו בסקר.

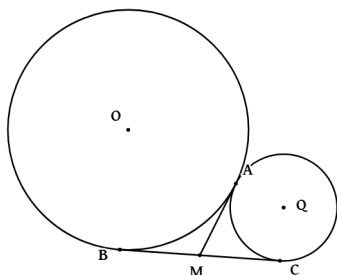
מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם הצביע בעד ולפחות אחד מהם הצביע נגד?

ד. לאחר מכן בוחרים באקראי, בזה אחר זה, 6 משתתפים בסקר.

מהי ההסתברות שבדיוק 2 מן הנבחרים היו מורים, ושהמשתתף האחרון שנבחר היה מורה?

פרק שלישי - גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

בפרק זה השאלות 4-5. בחרו מהן שאלות כרצונכם - בסך הכול חמש שאלות מכל השאלון.



4. שני מעגלים משיקים זה לזה מבחוץ בנקודה A (ראו סרטוט). O הוא מרכז המעגל השמאלי ו- Q הוא מרכז המעגל הימני. מעבירים בנקודה A משיק משותף לשני המעגלים. B ו- C הן נקודות ההשקה של ישר נוסף שמשיק לשני המעגלים (B על המעגל שמרכזו O). שני המשיקים נחתכים בנקודה M .

א. הוכיחו כי הזווית $\angle OMQ$ ישרה.

ב. הוכיחו כי: $AM^2 = OA \cdot AQ$.

- ג. נתון: $BC = 12$, ורדיוס המעגל שמרכזו Q הוא 4. חשבו את רדיוס המעגל שמרכזו הוא בנקודה O .

ד. חשבו את יחס השטחים: $\frac{S_{\triangle OBM}}{S_{\triangle AMC}}$.

5. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים בשאלה.

א. רשמו את תחום ההגדרה ואת האסימפטוטות המקבילות לצירים (אם יש כאלה) של הפונקציות הבאות:

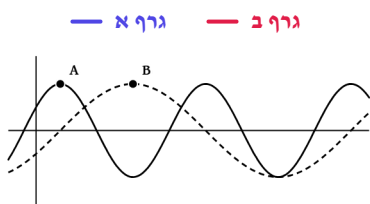
$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{2x + 3} \quad (1)$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x + 4} \quad (2)$$

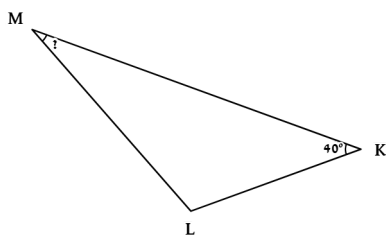
- ב. נתונה סדרה חשבונית $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ ובה $2n$ איברים (n הוא מספר טבעי). הראו כי סכום הסדרה שווה ל- $n \cdot (a_n + a_{n+1})$.

- ג. נתונות שתי הפונקציות: $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, $g(x) = \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

באיור שלפניכם שני גרפים: גרף א - מתואר בקו מקווקו; גרף ב - מתואר בקו רציף.



הנקודות A ו- B נמצאות מימין לציר ה- y והן הנקודות הקרובות ביותר לציר זה בהן הפונקציות מקבלות ערכים מקסימליים. מהו אורך הקטע AB ? נמקו את קביעתכם.



ד. במשולש KLM נתון $\angle K = 40^\circ$, $KL = 6$, $LM = 8$. חשבו את $\angle KML$.
נועה הגישה את הפתרון הבא:

$$\sin M = \frac{6 \sin 40^\circ}{8} = \frac{8}{\sin 40^\circ}$$

$$M_1 = 28.82^\circ, \quad M_2 = 180^\circ - 28.82^\circ = 151.18^\circ$$

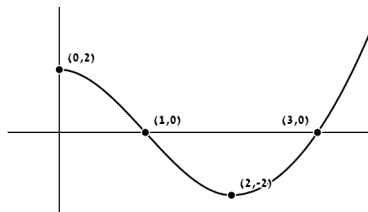
בדקו את הפתרון של נועה. אם יש טעות בפתרון, הסבירו מהי.

פרק רביעי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

בפרק זה השאלות 6-8. בחרו מהן שאלות כרצונכם - בסך הכול חמש שאלות מכל השאלון.

6. לפניכם חלק מגרף של פונקציה זוגית $f(x)$, המוגדרת לכל

x :



בסרטוט: $f(0) = 2$, $f(1) = 0$, נקודת המינימום $(2, -2)$, ו- $f(3) = 0$; לכל $x > 2$ הפונקציה עולה ו-
 $(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty)$.

א. סרטטו את הגרף השלם של הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$. פרטו בקצרה את שיקוליכם.

ב. עבור הסעיפים הבאים ידוע בנוסף כי עבור פונקציה נוספת $g(x)$ מתקיים: $g'(x) = -f(x)$.
 סרטטו את הגרף השלם של הפונקציה $g'(x)$. פרטו בקצרה את שיקוליכם.

ג. היעזרו בנתונים שבסרטוט, רשמו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבעו את סוגן. נמקו בקצרה.

ד. היעזרו בנתונים שבסרטוט ורשמו את תחומי הקעירות כלפי מעלה של $g(x)$. נמקו בקצרה.
 ה. סרטטו גרף של $g''(x)$ (הנגזרת השנייה של $g(x)$). נמקו בקצרה.

ו. מהו גודל השטח הכלוא בין הגרף של $g''(x)$ לבין ציר ה- x ברביע השלישי? נמקו.

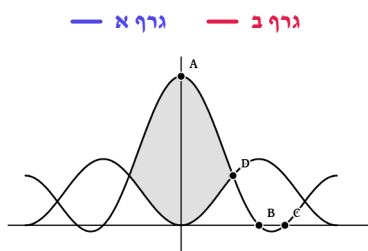
7. נתונות הפונקציות: $f(x) = 2 \sin^2 x - \sin x$, $g(x) = f(x - \frac{\pi}{2})$.

א. קבעו עבור כל אחת מהפונקציות: האם היא זוגית? אי-זוגית? אחרת? נמקו.

ב. בסרטוט שלפניכם שני גרפים. אחד מתאים לפונקציה $g(x)$, והשני מתאים לאחת מהפונקציות:

$$h(x) = a \cdot \sin^2 x \quad \text{או} \quad k(x) = a \cdot \cos^2 x$$

(1) קבעו איזה גרף מתאים לפונקציה $g(x)$ ולאיזו מהפונקציות $h(x)$ או $k(x)$ מתאים הגרף השני. נמקו.

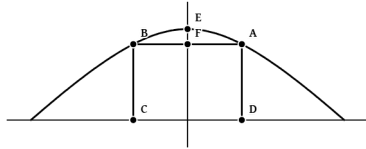


(2) ידוע כי שיעורי הנקודה D , נקודת החיתוך בין

שני הגרפים הקרובה ביותר לציר ה- y מימינו, הם $(\frac{\pi}{3}, 1)$. מצאו את הערך של הפרמטר a .

(3) מצאו את שיעורי הנקודות A, B, C שבסרטוט (נקודות החיתוך של גרף א עם הצירים בתחום $0 \leq x \leq \pi$).

ג. חשבו את גודל השטח המסומן בסרטוט.



8.

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה

$$f(x) = 2R - \sqrt{x^2 + R^2} \quad R, \text{ הוא פרמטר חיובי.}$$

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום

$$-\sqrt{3}R \leq x \leq \sqrt{3}R \quad (\text{בתחום זה } f(x) \geq 0).$$

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון.

דרך הנקודה A העבירו ישר המקביל לציר ה- x וחיתך את

גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה נוספת B. הנקודות C ו-D נמצאות על ציר ה- x כך שנוצר מלבן

ABCD. הנקודה F היא נקודת החיתוך של הצלע AB עם ציר ה- y . הנקודה E היא נקודת החיתוך

של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y . נתון ריבוע שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע EF. נסמן

ב- t את שיעור ה- x של הנקודה A.

א. (1) הביעו באמצעות R ו- t את אורך הקטע EF.

(2) הביעו באמצעות R ו- t את היקף המלבן ABCD.

ב. הביעו באמצעות R את הערך של t שבעבורו ההפרש בין היקף המלבן ABCD לבין היקף

הריבוע הוא מקסימלי.

עוד מתכונות, בגרונות ופתרונות מלאים: www.guyai.co.il