

מתכונת בגרות - שאלון 571

מבית GOOL בגריות ו-GuyAI

תלמידים ומורים יקרים,

לפניכם מתכונת שנבנתה בדיוק כמו בחינת הבגרות שמחכה לכם: אותו מבנה, אותם פרקים, אותה רמה ואותו ניקוד.

מתכונת ברמת בגרות. זו הבגרות כמו שהיא - לא קלה יותר ולא קשה יותר. היא מתאימה לחזרה הסופית בשבועות שלפני הבחינה, וזה הכלי הכי מדויק לבדוק אם התלמידים באמת מוכנים. מי שמסיים אותה בזמן ובציון טוב - מגיע לבגרות רגוע.

איך היא נולדה?

צוותי המורים של GOOL בגריות ו-GuyAI חיברו כוחות עם כלי הבינה המלאכותית המתקדמים ביותר שיש היום. ניתחנו כל בחינת בגרות בשאלון 571 מהשנים האחרונות: איזה פרק מופיע באיזו שאלה, איך בנויים הסעיפים ואיפה תלמידים נופלים. על הבסיס הזה בנינו מתכונת שנראית, מרגישה ונבחנת בדיוק כמו הבגרות האמיתית - אותו מבנה, אותם פרקים, אותה רמה ואותו ניקוד.

איך היא נבדקה?

כל שאלה עברה בדיקה עיוורת: פותר נוסף, שלא ראה את התשובות, פתר אותה מאפס. שאלה נכנסה למתכונת רק אם התשובה שלו זהה לשלנו, האיור תואם את הנתונים והרמה מתאימה - ובנוסף צוות המורים של GOOL בגריות עובר על המתכונות.

איך להפיק ממנה את המקסימום?

שבו לפתור בתנאי אמת - שעון מול העיניים, בלי ספר ובלי טלפון. פתרו לפי הוראות הבחירה שבראש השאלות, בדיוק כמו בבגרות: חמש שאלות מתוך שמונה. בחרו מראש על אילו שאלות תענו - גם הבחירה היא חלק מהאימון. בסוף בדקו את עצמכם מול דף התשובות הסופיות, ובכל סעיף שבו טעיתם פתחו את הפתרון המלא: שם מוסבר כל צעד, וגם הטעות הנפוצה שכדאי להיזהר ממנה.

טיפ למורים: כיתה הטרוגנית? אפשר לתת את אותו מבנה בשלוש רמות - "בדרך לבגרות" למי שמתחזק, "ברמת בגרות" לרוב הכיתה ו"מעל רמת בגרות" לחזקים. כולם מתאמנים על אותם פרקים, כל אחד ברמה שמקדמת אותו.

לעוד מתכונות, לכל בחינות הבגרות מהשנים הקודמות ולפתרונות מלאים: www.guyai.co.il
בהצלחה בבגרות!

צוותי GOOL בגריות ו-GuyAI

סוג הבחינה: בחינת מתכונת
מועד הבחינה: מתכונת 18, ברמת בגרות
מספר השאלון: 035571
שם התלמיד/ה: _____

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות

א.

משך הבחינה: ארבע שעות ועשרים דקות.

ב.

מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון - שאלות קצרות

פרק שני - אינדוקצייה, סדרות והסתברות

פרק שלישי - גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

פרק רביעי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה - 22 נקודות).

סך הנקודות שתוכלו לצבור לא יעלה על 100.

ג.

חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

(2) דפי נוסחאות ל-5 יחידות לימוד.

ד.

הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.

(3) יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה - 22 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון - שאלות קצרות

בפרק זה שאלה 1. אפשר לבחור בה כאחת מחמש השאלות שעליכם לענות עליהן.

1. ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

ב. בשכבת י"א בבית ספר נערך סקר. 45% מן התלמידים בשכבה מנגנים בכלי נגינה, ו-75% מן התלמידים בשכבה עוסקים בספורט.

לפניכם שתי טענות I-II. קבעו בעבור כל אחת מהן אם היא נכונה או לא נכונה, ונמקו את קביעותיכם.

I. לפחות 20% מן התלמידים בשכבה מנגנים בכלי נגינה וגם עוסקים בספורט.

II. ההסתברות לבחור באקראי תלמיד שעוסק בספורט מבין התלמידים המנגנים בכלי נגינה קטנה מן ההסתברות לבחור באקראי תלמיד שמנגן בכלי נגינה מבין התלמידים העוסקים בספורט.

ג. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$,

המוגדרת לכל x . לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אחת בלבד, שמשוואתה $y = 0$, ושתי נקודות חיתוך בלבד עם ציר ה- x , ששיעוריהן הם $(-2, 0)$ ו- $(4, 0)$.

שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ מוצגים בסרטוט: $(1, 2a)$, $(-6, -a)$ ו- $(9, -0.5a)$.

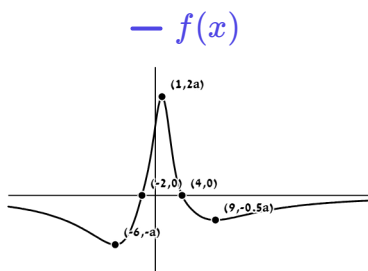
נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{(f(x))^2}$.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

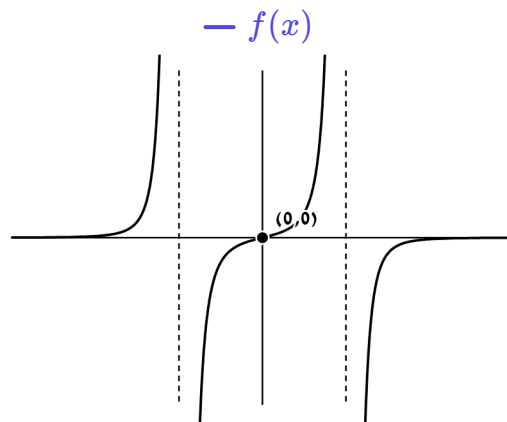
(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתון כי לישר $y = \frac{1}{a+2}$ ולגרף הפונקציה $g(x)$ יש בדיוק 3 נקודות משותפות.

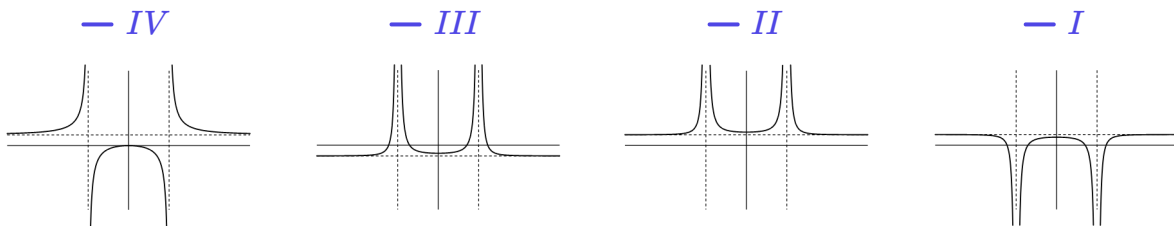
(3) מצאו את הערך של a .



- ד. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{-16x}{(x^2-4)^3}$, המוגדרת בתחום $x \neq \pm 2$. לפונקציה $f(x)$ אין נקודות קיצון, ובסרטוט מוצגת נקודת החיתוך היחידה של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .



- $g(x)$ היא פונקציה שהנגזרת שלה מקיימת $g'(x) = f(x)$. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת בתחום $x \neq \pm 2$. נתון כי גרף הפונקציה $g(x)$ עובר דרך הנקודה $(0, 1.25)$.
- (1) מצאו פונקציה $g(x)$ המקיימת תנאים אלה. לפניכם הגרפים I-IV.



- (2) אחד מן הגרפים I-IV שלפניכם מתאר פונקציה $g(x)$ המקיימת תנאים אלה. קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.

פרק שני - אינדוקצייה, סדרות והסתברות

בפרק זה השאלות 2-3. בחרו מהן שאלות כרצונכם - בסך הכול חמש שאלות מכל השאלון.

2. בסדרה חשבונית A נתון: $a_2 = 7 - 2k$, $a_6 = 3 + 6k$, k הוא פרמטר.

- א. (1) מצאו עבור אילו ערכים של k : הסדרה A עולה.
- (2) מצאו עבור אילו ערכים של k : הסדרה A יורדת.
- (3) מצאו עבור אילו ערכים של k : הסדרה A קבועה.

ב. נתון כי: $a_{21} = -84$.

מצאו את הערך של k .

הציבו את הערך של k שמצאתם וענו על הסעיפים ג-ד. נתונה סדרה חדשה, B, שאיבריה מוגדרים

$$b_n = a_n + 8n - 15, \text{ טבעי } n$$

ג. הוכיחו כי הסדרה B היא חשבונית.

ד. חשבו את הסכום: $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \dots + b_{39}^2 - b_{40}^2$.

3. בבית ספר גדול, חלק מהתלמידים מגיעים לבית הספר באופניים. אם בוחרים באקראי 5 תלמידים,

ההסתברות שבדיוק 2 מהם מגיעים באופניים מהווה $\frac{6}{7}$ מההסתברות שבדיוק אחד מהם מגיע באופניים.

א. בוחרים באקראי תלמיד. מהי ההסתברות שהוא מגיע באופניים?

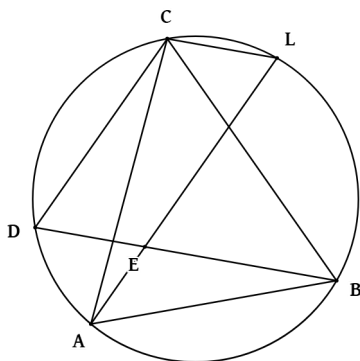
ב. נבחרו באקראי 5 תלמידים.

- (1) מהי ההסתברות שרוב התלמידים שנבחרו אינם מגיעים באופניים?
- (2) מהי ההסתברות שהתלמיד שנבחר שני מגיע באופניים, אם ידוע שרוב התלמידים שנבחרו אינם מגיעים באופניים?
- (3) מהי ההסתברות שרוב התלמידים שנבחרו אינם מגיעים באופניים, אם ידוע שהתלמיד הראשון שנבחר מגיע באופניים?

פרק שלישי - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

בפרק זה השאלות 4-5. בחרו מהן שאלות כרצונכם - בסך הכול חמש שאלות מכל השאלון.

4. משולש שווה שוקיים ABC ($CA = CB$) חסום במעגל.

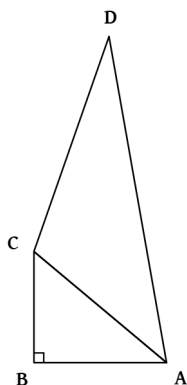


- נקודות D ו- L נמצאות על המעגל כך ש- $BD \parallel LC$. המיתרים AL ו- BD נחתכים בנקודה E (ראו ציור).
 א. הוכיחו כי המרובע $LEDC$ הוא מקבילית.
 ב. אילו מן התוצאות שלהלן ניתן להסיק בוודאות מהנתונים:

- (1) המשולש ADE שווה שוקיים.
 (2) המשולש CDE שווה שוקיים.
 (3) המשולש BCD הוא ישר זווית.

- ג. מה ניתן יהיה לומר על הנקודה E , אם BD חוצה את הזווית ABC ? נמקו.

5. בסרטוט שלפניכם משולש ישר זווית ABC ($\angle ABC = 90^\circ$)



על הצלע AC בנו משולש נוסף ACD כך ש- AC הוא חוצה

זווית BAD . נסמן: $\angle CAB = \alpha$, $AB = k$.

א. הביעו באמצעות k ו- α את האורך של AC .

ב. נתון: $AD = 2.5 \cdot k$, $CD = \frac{3\sqrt{5}}{4} \cdot k$.

חשבו את הערך של α .

הציבו $\cos \alpha = 0.8$ וענו על סעיפים ג-ד. הנקודה M היא

מרכז המעגל החסום במשולש ABC .

ג. הביעו באמצעות k את רדיוס המעגל החסום במשולש ABC .

ד. הנקודה E היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC . נתון: $ME = \sqrt{10}$.

חשבו את הערך של k .

פרק רביעי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

בפרק זה השאלות 6-8. בחרו מהן שאלות כרצונכם - בסך הכול חמש שאלות מכל השאלון.

6. נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{4x^3}{(x^4-1)^2}$, $g(x) = \frac{4x^3}{(x^4-1)^3}$.

א. ענו על תת-סעיפים (1)-(4) בעבור כל אחת משתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

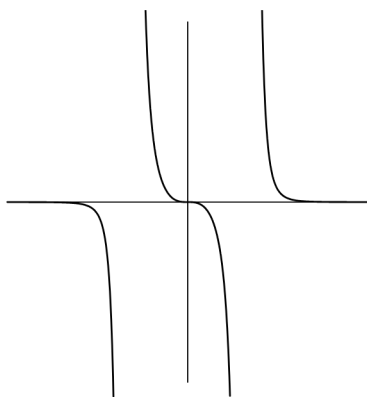
(3) הראו כי אין לפונקציה נקודות קיצון.

(4) הוכיחו כי הפונקציה היא אי-זוגית.

ב. הגרף שלפניכם מתאר את אחת הפונקציות $f(x)$, $g(x)$.

(1) קבעו איזו מן הפונקציות הגרף מתאר. נמקו את קביעתכם.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה האחרת.



ג. נתונה פונקציה $h(x)$ המקיימת: $h'(x) = g(x)$. $h(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות באותו תחום.

מה הם תחומי העלייה והירידה של $h(x)$?

ד. (1) חשבו את $\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} f(x) dx$. נמקו את תשובתכם.

(2) חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, ציר ה- x והישרים: $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. (הדרכה: הנגזרת של $x^4 - 1$ היא $4x^3$.)

ה. נתונה הפונקציה: $k(x) = f(x - b)$, $b \neq 0$, הוא פרמטר.

האם הפונקציה $k(x)$ זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמקו את תשובתכם.

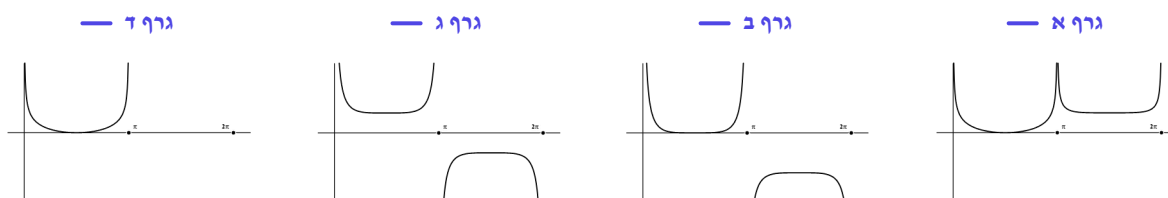
7. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1+\sin^2(x)}{\sin(x)}$. ענו על הסעיפים שלפניכם בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.
 (3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
 (4) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. נתונות שתי פונקציות: $k(x) = f(x) - 2$, $g(x) = \sqrt{f(x) - 2}$.

אחד מן הגרפים א-ד שלפניכם מתאר את הפונקציה $k(x)$, ואחד מן הגרפים מתאר את הפונקציה $g(x)$. קבעו איזה מן הגרפים מתאר כל אחת מן הפונקציות ונמקו את קביעותיכם.



8. נתונה הפונקציה: $f(x) = kx^3 - 3x^2 - x + \frac{1}{2}$, המוגדרת לכל x . k הוא פרמטר שונה מ-0.

הנקודה A היא נקודת הפיתול של הפונקציה $f(x)$.

א. הביעו באמצעות k את שיעורי הנקודה A.

ב. נתון כי הנקודה A נמצאת ברביע הראשון.

מצאו את תחום הערכים האפשרי של k .

ג. דרך הנקודה A העבירו אנך לציר ה- x החותך אותו בנקודה B, ואנך לציר ה- y החותך אותו בנקודה C.

נתון ריבוע I שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע AB, וריבוע II שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע AC.

מצאו את הערך של k שבעבורו סכום שטחי הריבועים I ו-II הוא מינימלי.

עוד מתכונות, בגרורות ופתרונות מלאים: www.guyai.co.il