

מתכונת בגרות - שאלון 571

מבית GOOL בגריות ו-GuyAI

תלמידים ומורים יקרים,

לפניכם מתכונת שנבנתה בדיוק כמו בחינת הבגרות שמחכה לכם: אותו מבנה, אותם פרקים, אותה רמה ואותו ניקוד.

מתכונת ברמת בגרות. זו הבגרות כמו שהיא - לא קלה יותר ולא קשה יותר. היא מתאימה לחזרה הסופית בשבועות שלפני הבחינה, וזה הכלי הכי מדויק לבדוק אם התלמידים באמת מוכנים. מי שמסיים אותה בזמן ובציון טוב - מגיע לבגרות רגוע.

איך היא נולדה?

צוותי המורים של GOOL בגריות ו-GuyAI חיברו כוחות עם כלי הבינה המלאכותית המתקדמים ביותר שיש היום. ניתחנו כל בחינת בגרות בשאלון 571 מהשנים האחרונות: איזה פרק מופיע באיזו שאלה, איך בנויים הסעיפים ואיפה תלמידים נופלים. על הבסיס הזה בנינו מתכונת שנראית, מרגישה ונבחנת בדיוק כמו הבגרות האמיתית - אותו מבנה, אותם פרקים, אותה רמה ואותו ניקוד.

איך היא נבדקה?

כל שאלה עברה בדיקה עיוורת: פותר נוסף, שלא ראה את התשובות, פתר אותה מאפס. שאלה נכנסה למתכונת רק אם התשובה שלו זהה לשלנו, האיור תואם את הנתונים והרמה מתאימה - ובנוסף צוות המורים של GOOL בגריות עובר על המתכונות.

איך להפיק ממנה את המקסימום?

שבו לפתור בתנאי אמת - שעון מול העיניים, בלי ספר ובלי טלפון. פתרו לפי הוראות הבחירה שבראש השאלות, בדיוק כמו בבגרות: חמש שאלות מתוך שמונה. בחרו מראש על אילו שאלות תענו - גם הבחירה היא חלק מהאימון. בסוף בדקו את עצמכם מול דף התשובות הסופיות, ובכל סעיף שבו טעיתם פתחו את הפתרון המלא: שם מוסבר כל צעד, וגם הטעות הנפוצה שכדאי להיזהר ממנה.

טיפ למורים: כיתה הטרוגנית? אפשר לתת את אותו מבנה בשלוש רמות - "בדרך לבגרות" למי שמתחזק, "ברמת בגרות" לרוב הכיתה ו"מעל רמת בגרות" לחזקים. כולם מתאמנים על אותם פרקים, כל אחד ברמה שמקדמת אותו.

לעוד מתכונות, לכל בחינות הבגרות מהשנים הקודמות ולפתרונות מלאים: www.guyai.co.il
בהצלחה בבגרות!

צוותי GOOL בגריות ו-GuyAI

סוג הבחינה: בחינת מתכונת
מועד הבחינה: מתכונת 19, ברמת בגרות
מספר השאלון: 035571
שם התלמיד/ה: _____

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות

א.

משך הבחינה: ארבע שעות ועשרים דקות.

ב.

מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון - שאלות קצרות

פרק שני - אינדוקצייה, סדרות והסתברות

פרק שלישי - גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

פרק רביעי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה - 22 נקודות).

סך הנקודות שתוכלו לצבור לא יעלה על 100.

ג.

חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

(2) דפי נוסחאות ל-5 יחידות לימוד.

ד.

הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.

(3) יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה - 22 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון - שאלות קצרות

בפרק זה שאלה 1. אפשר לבחור בה כאחת מחמש השאלות שעליכם לענות עליהן.

1. ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. (1) הוכיחו באינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2$$

(2) חשבו את הערך של הסכום: $3 \cdot 10 + 4 \cdot 13 + 5 \cdot 16 + \dots + 30 \cdot 91$

ב. בסרטוט שלפניכם טרפז $ABCD$ ($AB \parallel CD$).

הנקודה O היא מפגש אלכסוני הטרפז. הנקודה M היא אמצע הבסיס AB .

נתון: $MO \perp AB$.

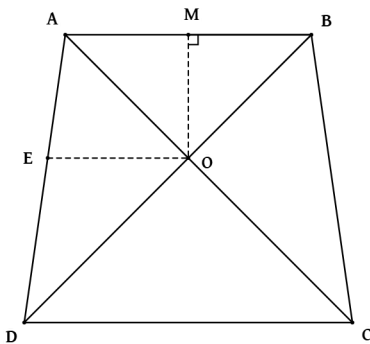
(1) הוכיחו כי הטרפז $ABCD$ הוא שווה שוקיים.

הנקודה E נמצאת על השוק AD כך שהקטע EO מקביל לבסיסי הטרפז.

נתון כי אלכסוני הטרפז מאונכים זה לזה, $AO = 6$,

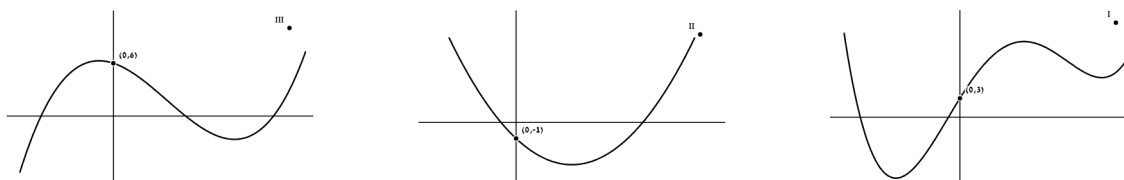
$$AD = 10$$

(2) מצאו את אורך הקטע AE .



ג. הפונקציה $f(x)$, פונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ ופונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ מוגדרות לכל x .

לפניכם שלושה גרפים I-III. אחד מן הגרפים מתאר את הפונקציה $f(x)$, אחד את פונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ ואחד את פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$. בכל אחד מן הגרפים מופיעות כל נקודות הקיצון וכל נקודות החיתוך שלו עם ציר ה- x . על כל אחד מן הגרפים כתובים שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה- y .



(1) התאימו לכל אחת מן הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $f''(x)$ את הגרף המתאר אותה. נמקו את תשובתכם.

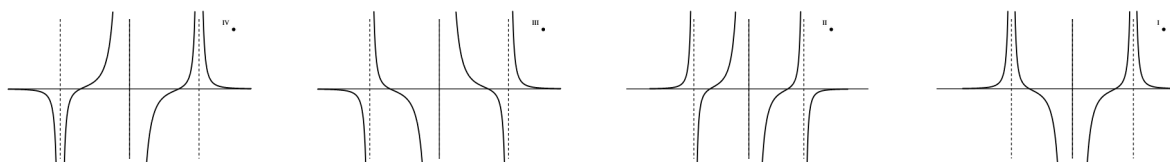
(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$? נמקו את תשובתכם.

שיעורי נקודת המקסימום של הפונקציה $f(x)$ הם $(a, 12)$.

(3) מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f'(x)$, על ידי גרף הפונקציה $f''(x)$, על ידי הישר $x = a$ ועל ידי ציר ה- y .

ד. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4x^3 - 8x}{(x^4 - 4x^2)^2}$, המוגדרת בתחום: $x \neq \pm 2$, $x \neq 0$.

(1) מצאו את תחומי החיוביות של הפונקציה $f(x)$.



(2) קבעו איזה מבין הגרפים I-IV שלפניכם מתאר את הפונקציה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.

(3) חשבו את השטח הכלוא על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = 1$ ו- $x = \frac{1}{2}$.

פרק שני - אינדוקצייה, סדרות והסתברות

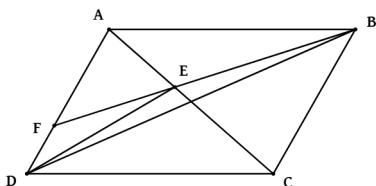
בפרק זה השאלות 2-3. בחרו מהן שאלות כרצונכם - בסך הכול חמש שאלות מכל השאלון.

2. נתונה סדרה הנדסית בת $3n$ איברים: $a_1, a_2, \dots, a_{3n}$. מנת הסדרה היא q .
- א. הביעו באמצעות q את היחס בין סכום הסדרה לסכום האיברים שמקומם מתחלק ב-3
- $$(a_3 + a_6 + \dots + a_{3n})$$
- ב. נתון כי היחס בין סכום האיברים $a_2 + a_5 + \dots + a_{3n-1}$ לסכום האיברים $a_1 + a_4 + \dots + a_{3n-2}$ הוא 3.
- מצאו את q . נמקו.
- ג. נתון: $a_3 = 18$. נסמן: $T = a_3 - a_2 + a_6 - a_5 + a_9 - a_8 + \dots + a_{3n} - a_{3n-1}$.
- הביעו את T באמצעות n בלבד.
3. במשתלה גדולה מגדלים שני סוגי שתילים בלבד: שתילי עגבנייה ושתילי פלפל. חלק מן השתילים אורגניים והשאר אינם אורגניים. ההסתברות שמבין שני שתילים שנבחרים באקראי מבין כל השתילים במשתלה לפחות אחד הוא שתיל פלפל היא 0.84. בוחרים באקראי שתיל אחד מבין כל השתילים במשתלה.
- א. מהי ההסתברות שנבחר שתיל עגבנייה?
- ב. ההסתברות לבחור באקראי שתיל פלפל מבין השתילים האורגניים היא $\frac{9}{10}$. ההסתברות לבחור באקראי שתיל עגבנייה מבין השתילים שאינם אורגניים היא $\frac{1}{2}$. בוחרים באקראי שתיל אחד מבין כל השתילים במשתלה.
- מהי ההסתברות שנבחר שתיל אורגני?
- ג. בוחרים באקראי שני שתילים מבין כל השתילים במשתלה.
- ידוע שנבחרו שני שתילי פלפל. מהי ההסתברות שאחד מהם אורגני והאחר אינו אורגני?
- ד. בוחרים באקראי 4 שתילים מבין כל השתילים במשתלה. ידוע שלפחות אחד מהם אורגני.
- מהי ההסתברות שבדיוק 2 מבין השתילים שנבחרו אורגניים?

פרק שלישי - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

בפרק זה השאלות 4-5. בחרו מהן שאלות כרצונכם - בסך הכול חמש שאלות מכל השאלון.

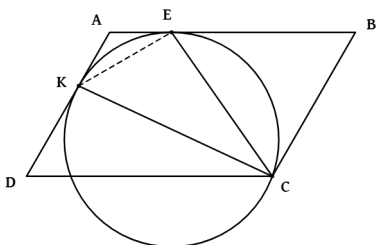
4. המרובע $ABCD$ הוא מקבילית. הנקודה E היא נקודה על האלכסון AC . המשך הקטע BE חותך את הצלע AD בנקודה F .



- א. הוכיחו: $S_{\triangle AED} = S_{\triangle AEB}$.
 ב. ידוע: $\frac{AE}{AC} = \frac{2}{5}$. נסמן: $S_{\triangle AEB} = S$.
 (1) הביעו את שטח המרובע $FECD$ באמצעות S .
 (2) הביעו את שטח המשולש BFD באמצעות S .

5. $ABCD$ היא מקבילית שבה $\angle BAD = 120^\circ$.

הצלעות AB ו- AD משיקות למעגל שרדיוסו R בנקודות E ו- K בהתאמה. הנקודה C נמצאת על המעגל (ראו סרטוט).



- א. הוכיחו: $\angle KCE = 30^\circ$.
 ב. נתון: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $\angle KCD = \alpha$.
 (1) הביעו באמצעות α את הזוויות של המשולש KCE .
 (2) הביעו באמצעות α ו- R את האורכים של צלעות המשולש KCE .
 ג. הביעו באמצעות α את היחס $\frac{EB}{AE}$.
 ד. נתון: $EB = 2AE$.
 חשבו את α .

פרק רביעי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

בפרק זה השאלות 6-8. בחרו מהן שאלות כרצונכם - בסך הכול חמש שאלות מכל השאלון.

6. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2-4}{(x-a)^2}$, $0 < a < 2$ הוא פרמטר.

א. ענו על התת-סעיפים (1)-(5). הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצאו את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(5) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{x^2}{(x-a)^2}$, המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקציה $f(x)$.

(1) הוכיחו כי גרף הפונקציה $g(x)$ נמצא כולו מעל גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) הביעו באמצעות a את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, על ידי הישר $x = -1$ ועל ידי ציר ה- y .

7. שאלה זו בנויה מארבעה סעיפים א-ד שאינם תלויים זה בזה.

א. בסדרה מתקיים: $a_{n+1} = a_n + 6n^2 + 6n + 1$.

(1) הוכיחו: אם ידוע כי עבור k טבעי מסוים מתקיים $a_k = 2k^3 - k + 1$, אז

$$a_{k+1} = 2(k+1)^3 - (k+1) + 1$$

(2) האם מתשובתכם לסעיף א(1) נובע שלכל n טבעי בסדרה מתקיים בהכרח

$$a_n = 2n^3 - n + 1 \text{ ? נמקו.}$$

ב. בדקו נכונות / אי נכונות הטענה הבאה. אם הטענה נכונה - הוכיחו אותה, אם לא - הציגו דוגמה נגדית.

אם זוויות α ו- β של משולש מקיימות את השוויון $\cos 2\alpha = \cos 2\beta$, אז המשולש הוא שווה-שוקיים.

ג. במשחק מחשב מופיעה בכל שלב דמות במקום אקראי על

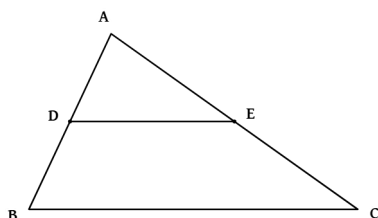
גבי משטח משולש ABC . הנקודה D היא אמצע

הצלע AB והנקודה E היא אמצע הצלע AC ,

כמתואר בסרטוט.

מהי ההסתברות שהדמות מופיעה בתוך הטרפז

$DBCE$?



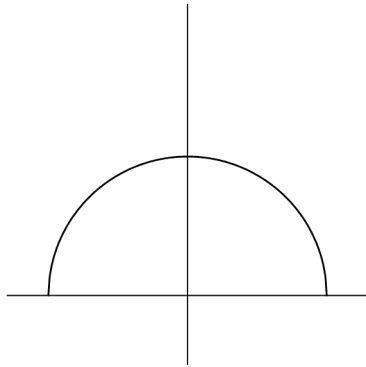
ד. לפניכם שלוש פונקציות:

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} \quad ; \quad g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 9} \quad ; \quad h(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$$

לאיזו מהן התכונה הבאה:

לפונקציה יש שתי נקודות אי-הגדרה ושתי אסימפטוטות אנכיות, ואין לה אסימפטוטה אופקית.

נמקו את בחירתכם על ידי הסבר להתאמה ועל ידי פסילת האחרות.



8. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה:

$$f(x) = \sqrt{25 - x^2} \text{ . נתון הישר } y = 10 - 2x \text{ .}$$

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי שתי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הישר הנתון.

ג. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום שבין שתי הנקודות שמצאתם בסעיף ב. דרך הנקודה A העבירו שני ישרים: ישר המקביל לציר ה- y וחיתך את הישר הנתון בנקודה B, וישר המקביל לציר ה- x וחיתך את הישר הנתון בנקודה C. נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה A.

(1) הביעו באמצעות t את אורך הקטע AB.

(2) הביעו באמצעות t את אורך הקטע AC.

ד. מצאו את הערך של t שבעבורו סכום אורכי הקטעים AB ו-AC הוא מקסימלי.

עוד מתכונות, בגרורות ופתרונות מלאים: www.guyai.co.il