

שאלה 1 · שאלות קצרות: אינדוקציה, מקבילית בטרפז, גרפים של f, f', f'' ו- $\frac{1}{f}$

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

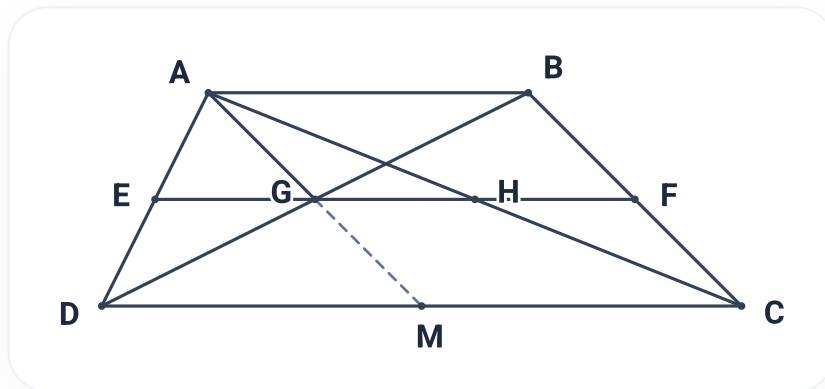
נתונות שתי סדרות המוגדרות לכל n טבעי: $a_n = 4n$, $b_n = 3^n$. נסמן: $T_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$.

א(1). הוכיחו כי: אם בעבור k טבעי כלשהו מתקיים: $T_k = (2k - 1) \cdot 3^{k+1}$, אז מתקיים: $T_{k+1} = (2k + 1) \cdot 3^{k+2}$.

לפניכם טענה: לכל n טבעי מתקיים: $T_n = (2n - 1) \cdot 3^{n+1}$.

א(2). הסבירו מדוע טענה זו אינה נכונה.

בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel CD$) הקטע EF הוא קטע אמצעים. הקטע EF חותך את האלכסונים AC ו- BD של הטרפז בנקודות H ו- G בהתאמה. נתון כי המרובע $ABFG$ הוא מקבילית.

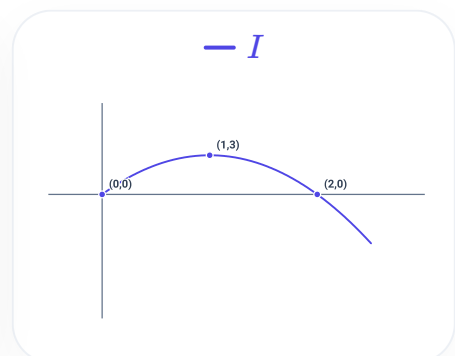
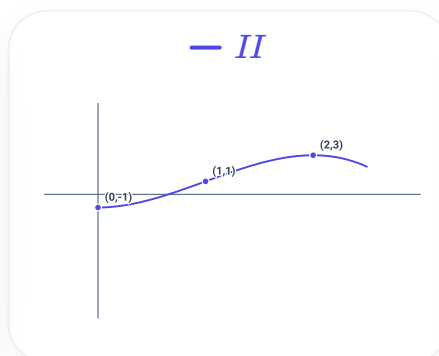
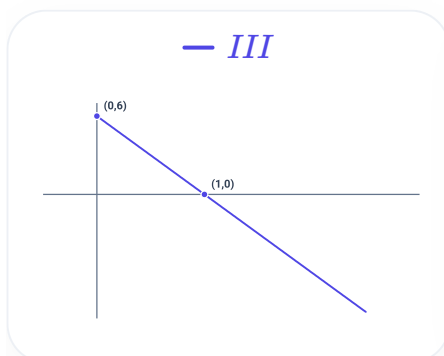


ב(1). הוכיחו: $GF = 2HF$.

המשך הישר AG חותך את הבסיס DC בנקודה M .

ב(2). הוכיחו: הישר AM חוצה את הבסיס DC .

לפניכם הגרפים III-I, המייצגים את הפונקציה $f(x)$, את פונקציית הנגזרת הראשונה $f'(x)$, ואת פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$. הפונקציות מוגדרות עבור: $0 \leq x \leq 2.5$.



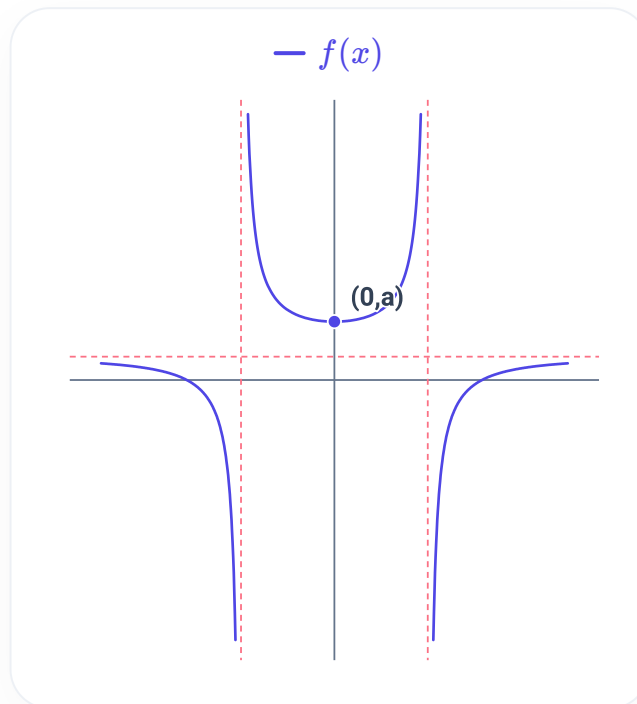
ג(1). התאימו כל אחד מן הגרפים I-III לכל אחת מן הפונקציות: $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$. נמקו.

ענו על התת-סעיפים (2)-(3) על פי הנתונים המופיעים בגרפים I-III.

ג(2). מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת הפיתול שלה.

ג(3). מצאו את הערך של האינטגרל: $\int_0^1 f''(x) dx$.

לפניכם הגרף של הפונקציה $f(x)$. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת עבור: $x \neq 2$, $x \neq -2$. משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ הן: $x = -2$, $x = 2$, $y = k$, $0 < k < 1$. שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y הם: $(0, a)$, a הוא מספר חיובי.



ד(1). מצאו עבור אילו ערכים של a יש לגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $\frac{1}{f(x)}$ בדיוק שתי נקודות חיתוך. נמקו.

ד(2). נתון כי המרחק בין האסימפטוטות האופקיות של הפונקציות $f(x)$ ו- $\frac{1}{f(x)}$ הוא $\frac{8}{3}$. מהו הערך של k ? נמקו.

שאלה 2 · סדרה הנדסית מתחלפת סימן, סדרה $b_n = a_n \cdot k^n$, תנאי התכנסות ומחיקת כל איבר שלישי

נתונה סדרה הנדסית A שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \dots$ ובה m איברים (m הוא מספר טבעי גדול מ-2).

נתון: הסימנים של איברי הסדרה A מתחלפים (איבר חיובי, איבר שלילי, וחוזר חלילה, או להפך).

סכום $m - 2$ האיברים האחרונים בסדרה הוא פי 9 מסכום $m - 2$ האיברים הראשונים בסדרה.

א(1). מצאו את מנת הסדרה A.

א(2). האם הסדרה A עולה, יורדת או לא עולה ולא יורדת? נמקו את תשובתכם.

המשיכו את הסדרה A כך שנוצרה סדרה הנדסית אין-סופית. נתונה סדרה אין-סופית B שאיבריה מקיימים

$$b_n = a_n \cdot k^n \text{ לכל } n \text{ טבעי. } k \text{ הוא פרמטר שונה מ-0.}$$

ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, והביעו את המנה שלה באמצעות k .

נתון כי סכום הסדרה B מתכנס.

ג. מצאו את תחום הערכים האפשרי של k .

נתון: מנת הסדרה B היא $\frac{1}{2}$. סכום הסדרה B הוא 4.

ד. מצאו את הערך של k ואת הערך של b_1 .

בסדרה B מחקו כל איבר שלישי ($b_3, b_6, b_9, \dots$).

ה. מצאו את סכום האיברים הנותרים.

שאלה 3 · הסתברות: ברנולי עם p לא ידוע, הסתברות מותנית ותנאי עצירה - מותגי קפה

בעיר גדולה כל תושב שותה קפה של אחד משני מותגים בלבד: מותג X או מותג Y.

נסמן ב- p את ההסתברות שתושב שנבחר באקראי שותה קפה של מותג X ($0 < p < 1$).

בוחרים באקראי 4 תושבים.

נתון כי ההסתברות שבדיוק שלושה מהם שותים קפה של מותג X גדולה פי 2 מן ההסתברות שארבעתם שותים קפה של מותג X.

א. מצאו את הערך של p .

בוחרים באקראי 5 תושבים.

ב. ידוע כי חמשתם שותים קפה של אותו מותג. מהי ההסתברות שהם שותים קפה של מותג X?

חלק מן התושבים הם מבוגרים והשאר צעירים.

נתון כי 25% מן התושבים המבוגרים שותים קפה של מותג Y ו-55% מן התושבים הצעירים שותים קפה של מותג X.

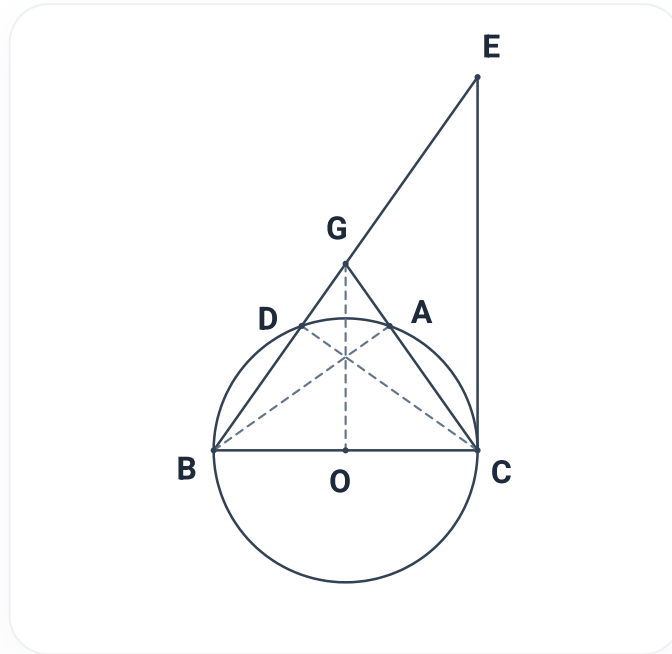
ג. מהי ההסתברות לבחור באקראי תושב צעיר אחד מבין כל התושבים?

בית קפה ערך טעימות בעיר. מיכל, אחת העובדות, פנתה באקראי לתושבים צעירים בלבד. היא פנתה אליהם בזה אחר זה והפסיקה מייד לאחר שפגשה צעיר אחד ששותה קפה של מותג אחד וצעיר נוסף ששותה קפה של המותג האחר.

ד. מהי ההסתברות שמיכל פנתה ל-4 צעירים בדיוק?

שאלה 4 · משולש שווה-שוקיים שבסיסו קוטר במעגל: גבהים וחוצה זווית, דמיון, יחס שטחים 8 ומשיק

BC הוא קוטר במעגל שמרכזו O ורדיוסו R . הנקודה G נמצאת מחוץ למעגל כך ש- $GB = GC$. הקטע GB חותך את המעגל בנקודה D , והקטע GC חותך את המעגל בנקודה A (ראו סרטוט).



א. הוכיחו כי BA ו- CD הם גבהים במשולש GBC , וכי הישר GO חוצה את $\angle BGC$.

ב. הוכיחו כי $\triangle GBC \sim \triangle GAD$.

נתון כי: $\frac{S_{ADBC}}{S_{GAD}} = 8$.

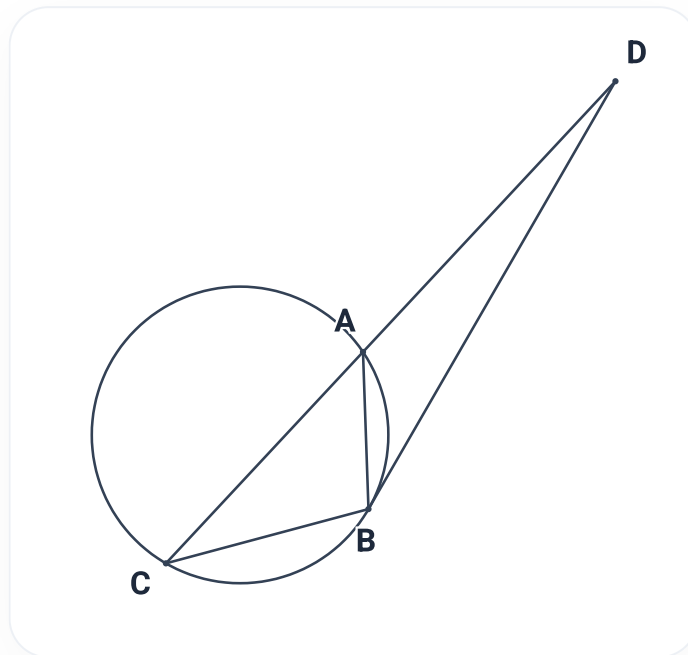
ג. הביעו באמצעות R את אורך הקטע GB .

ד. הנה הנקודה C העבירו משיק למעגל שחותך את המשך הקטע BG בנקודה E .

חשבו פי כמה גדול שטח המשולש CBE משטח המשולש DBC .

שאלה 5 · משיק וחותר במעגל: זווית של 135° , יחס שטחים ורדיוס מעגל חסום

המשולש ABC חסום במעגל שהרדיוס שלו הוא R . המשיק למעגל בנקודה B חותך את המשך הצלע CA בנקודה D , כמתואר בסרטוט. נסמן: $\angle ABD = \alpha$. נתון: $\angle DBC = 135^\circ$.



א. הביעו את אורכי הצלעות AB ו- BC באמצעות R ו- α , אם יש צורך.

נתון: היחס בין שטח המשולש BDC ובין שטח המשולש BDA הוא 2.5.

ב. מצאו את α .

נתון כי רדיוס המעגל החסום במשולש BDA הוא 4.

ג. מצאו את R .

שאלה 6 · פונקציה רציונלית עם פרמטר: חקירה, פונקציה קדומה ומכפלה

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{3x^2}{(x^3-a)^2}$, a הוא פרמטר חיובי.

ענו על סעיפים א-ה. הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

א(3). מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

היא פונקציה המקיימת: $g'(x) = f(x)$. גרף הפונקציה $g(x)$ עובר בנקודה $(0,0)$. הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות באותו התחום.

ג. מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה $g(x)$.

ד(1). מצאו פונקציה $g(x)$ המקיימת תנאים אלו.

ד(2). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ שמצאתם בת-סעיף ד(1).

היא פונקציה המוגדרת כך: $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. הפונקציות $f(x)$ ו- $h(x)$ מוגדרות באותו התחום.

ה(1). מצאו את משוואות האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה $h(x)$.

ה(2). מצאו את תחומי החיוביות של הפונקציה $h(x)$.

שאלה 7 · חקירת $\cos^2 x \cdot \sin 2x$ בתחום סגור והפונקציה $\sqrt{a \cdot f'(x)}$

נתונה הפונקציה: $f(x) = (\cos x)^2 \cdot \sin(2x)$, המוגדרת בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

א. הוכיחו כי הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

ב. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. נתונה הפונקציה: $g(x) = \sqrt{a \cdot f'(x)}$, a הוא פרמטר שלילי.

ד(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

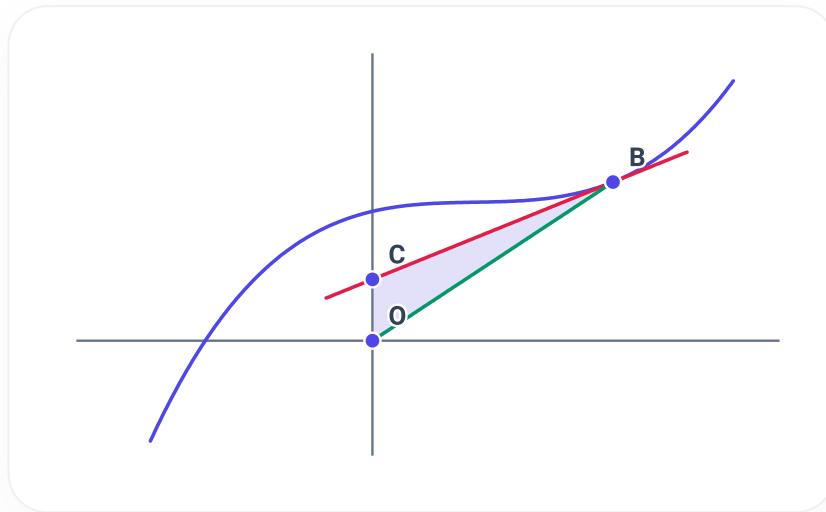
ד(2). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x .

נתון כי בכל אחד מהקטעים $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{6}$ ו- $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ יש לפונקציה $f(x)$ נקודת פיתול אחת בלבד.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

שאלה 8 · משיק לפולינום בנקודה כללית: תחום הפרמטר ושטח מקסימלי של משולש

נתונה הפונקציה: $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 3x + 9$, המוגדרת לכל x . הנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון (ראו סרטוט). מן הנקודה B מעבירים משיק לגרף הפונקציה $f(x)$. המשיק חותך את ציר ה- y בנקודה C. נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה B.



א. הביעו באמצעות t את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה B.

ידוע כי הנקודה C נמצאת מעל ציר ה- x .

ב. מהו תחום הערכים של t ?

הנקודה O היא ראשית הצירים.

ג. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OBC.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math