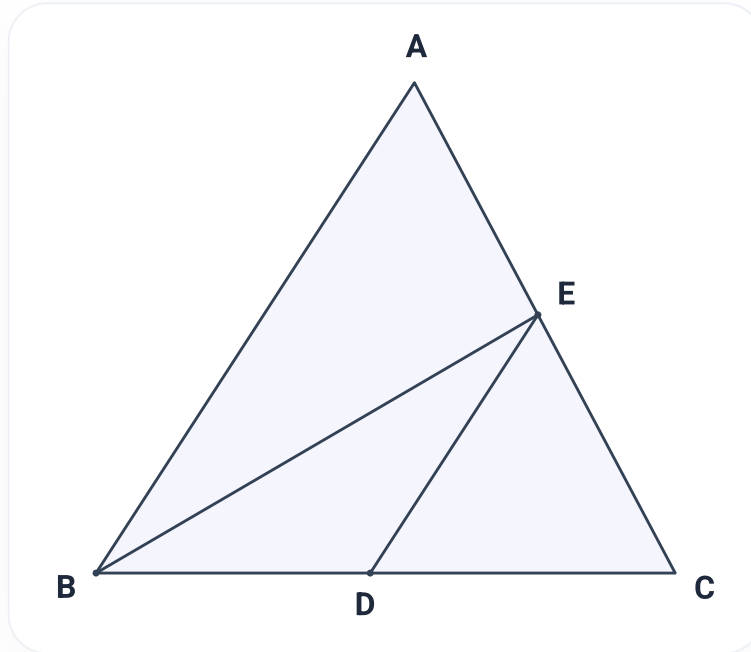


שאלה 1 · שאלות קצרות: יחס רדיוסים, ביטוי ברנולי, גרפי f' ו- f'' , סדרת זוויות מרכזיות

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

בסרטוט שלפניכם משולש ABC . הנקודה D נמצאת על הצלע BC , והנקודה E נמצאת על הצלע AC , כך ש- $DE \parallel AB$.

נתון: $EC = 4$, $BE = 7$.



א(1). מצאו את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את משולש EDC ובין רדיוס המעגל החוסם את משולש BDE . נמקו את תשובתכם.

נתון: המרובע $ABDE$ הוא בר-חסימה במעגל, $DE = DC$.

א(2). הוכיחו כי המשולש EDC הוא שווה צלעות.

ב. בבית ספר מסוים ההסתברות שתלמיד שנבחר באקראי מגיע לבית הספר באופניים היא 0.3. בוחרים באקראי 5 תלמידים מבית הספר.

לפניכם שני ביטויים:

$$\text{ביטוי 1: } 1 - 0.7^5 - 5 \cdot 0.3 \cdot 0.7^4$$

$$\text{ביטוי 2: } \binom{5}{3} \cdot 0.3^3 \cdot 0.7^2 + \binom{5}{4} \cdot 0.3^4 \cdot 0.7 + 0.3^5$$

קבעו איזו מן ההסתברויות I-III שלפניכם אפשר לחשב על ידי ביטוי 1 ואיזו מהן אפשר לחשב על ידי ביטוי 2.

I. ההסתברות שיותר מבין הנבחרים מגיעים באופניים מאשר לא באופניים.

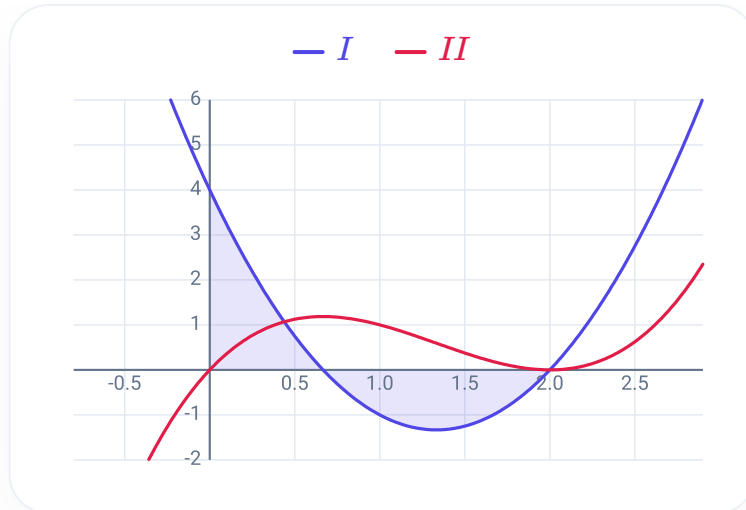
II. ההסתברות שלפחות שניים מהנבחרים מגיעים באופניים.

III. ההסתברות שלכל היותר שניים מהנבחרים מגיעים באופניים.

$f(x)$ היא פונקציה. בסרטוט שלפניכם מוצגים שני גרפים: גרף I וגרף II. אחד הגרפים הוא של פונקציית הנגזרת

$f'(x)$, והגרף האחר הוא גרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$. (גרף II עובר בראשית ומשיק לציר ה- x ב-

$x = 2$.)

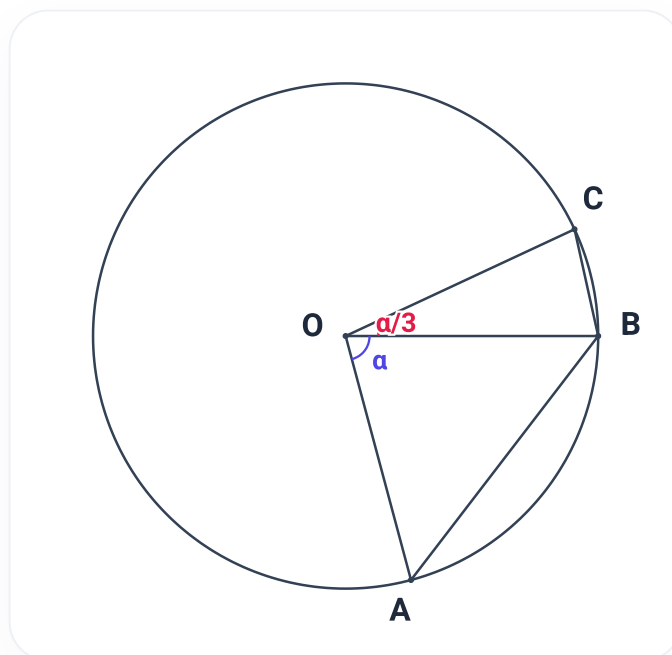


ג(1). איזה גרף הוא של $f'(x)$, ואיזה גרף הוא של $f''(x)$? נמקו.

ג(2). הוכיחו שהשטח המוגבל על ידי גרף I ועל ידי ציר ה- x ברביע הרביעי שווה לשטח המוגבל על ידי גרף I, על ידי ציר ה- x ועל ידי ציר ה- y ברביע הראשון.

במעגל שמרכזו O בונים סדרה אין-סופית של משולשים שווים שוקיים. זוויות הראש של המשולשים הן זוויות מרכזיות במעגל, ושוקי המשולשים הם רדיוסים במעגל.

זווית הראש של המשולש הראשון (ΔAOB) היא α . זווית הראש של המשולש השני (ΔBOC) היא $\frac{\alpha}{3}$, כמתואר בסרטוט.



ממשיכים לבנות משולשים שווים שוקיים כך שזווית הראש של כל משולש נוסף בסדרה קטנה פי 3 מזווית הראש של המשולש שלפניו.

נתון: סכום כל זוויות הראש של כל המשולשים בסדרה הוא 135° .

ד(1). מצאו את α .

ד(2). האם אורכי הבסיסים של כל המשולשים האלה הם סדרה הנדסית? נמקו את תשובתכם.

שאלה 2 · סדרות הנדסיות אינסופיות: סדרת המכפלות, מונוטוניות, סדרה חשבונית ושוויון סכומים

נתונות שתי סדרות הנדסיות אינסופיות מתכנסות A ו-B, שכל איבריהן שונים מ-0. האיבר הכללי של הסדרה A הוא a_n ומנתה היא q_A . האיבר הכללי של הסדרה B הוא b_n ומנתה היא q_B .

משתי הסדרות ההנדסיות A ו-B בונים סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת חדשה שאיבריה הם:

$$a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, \dots, a_nb_n, \dots$$

כל שלוש הסדרות, הסדרה A, הסדרה B והסדרה החדשה, אינן קבועות.

א. הביעו את המנה של הסדרה החדשה באמצעות q_A ו- q_B .

הסדרה A עולה, והסדרה B אינה עולה ואינה יורדת. בנוגע לכל אחד משני ההיגדים (1)-(2) שלפניכם, קבעו אם הוא נכון או לא נכון ונמקו את קביעתכם.

ב(1). הסדרה החדשה אינה עולה ואינה יורדת.

ב(2). כל איברי הסדרה A הם חיוביים.

המספרים c_1, c_2 ו- c_3 הם שלושה איברים ראשונים בסדרה חשבונית. נתון כי c_3 שווה ל- $-2c_2$, ומתקיים גם:

$$\frac{c_2 \cdot c_3}{c_1} = \frac{1}{120}$$

ג. מצאו את c_1 .

נתון כי המנה של הסדרה החדשה שווה ל- c_1 , ומתקיים גם:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \dots = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots) \cdot (b_1 + b_2 + b_3 + \dots)$$

ד. מצאו את הערכים של q_A ושל q_B .

שאלה 3 · כד שנבחר בהטלת קובייה: הוצאה עם החזרה או בלי החזרה לפי הצבע, ניסויים עד לכדור צהוב,

והעברת כדורים

בכד א' יש 6 כדורים אדומים ו-4 כדורים צהובים, ובכד ב' יש רק כדורים צהובים.

דנה מטילה קובייה הוגנת: אם מתקבל אחד המספרים 1-4 היא בוחרת בכד א', ואחרת - בכד ב'. היא מוציאה באקראי כדור מהכד שבחרה.

אם הכדור אדום, היא מוציאה באקראי כדור שני מאותו הכד (הוצאה ללא החזרה).

אם הכדור הראשון צהוב, היא מחזירה את הכדור לכד ושוב מוציאה באקראי כדור מאותו הכד.

א. ידוע שדנה הוציאה שני כדורים באותו הצבע. מהי ההסתברות ששניהם אדומים?

דנה מחזירה לכד את הכדורים שהוציאה.

יעל מבצעת את התהליך הזה: היא מטילה את הקובייה ובוחרת כד באותו אופן, מוציאה ממנו באקראי כדור אחד ומחזירה אותו לכד. יעל חוזרת על תהליך זה עד שהיא מוציאה כדור צהוב, מחזירה אותו לכד ומפסיקה להוציא כדורים.

ב. מצאו את ההסתברות שיעל ביצעה תהליך זה 4 פעמים בדיוק.

העבירו חלק מן הכדורים מכד ב' לכד א'. לאחר מכן בחרו כד באותו אופן (בהטלת הקובייה) והוציאו ממנו באקראי כדור אחד. נתון כי לאחר ההעברה ההסתברות שהכדור שהוציאו היה צהוב היא $\frac{3}{4}$.

ג. האם ייתכן שלפני ההעברה היו בכד ב' 7 כדורים? נמקו את תשובתכם.

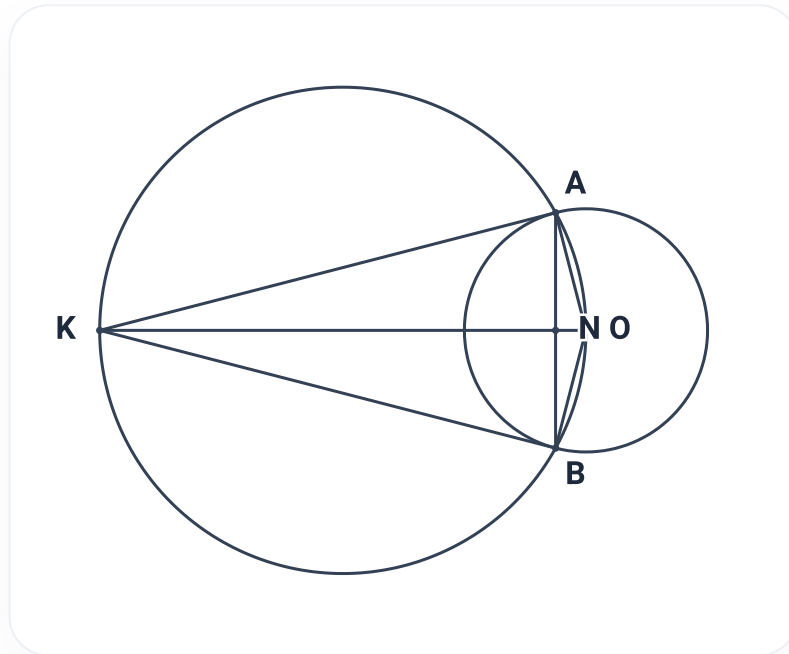
שאלה 4 · שני מעגלים נחתכים: שני משיקים, זווית היקפית על קוטר, דמיון ויחס שטחים

בסרטוט שלפניכם מעגל גדול שרדיוסו R ומעגל קטן שמרכזו בנקודה O ורדיוסו r .

הנקודה O נמצאת על המעגל הגדול.

הנקודות A ו- B הן נקודות החיתוך של שני המעגלים.

דרך הנקודה A העבירו משיק למעגל הקטן. המשיק חותך את המעגל הגדול בנקודה K .



א. הוכיחו כי $\angle AOB = 2\angle KAB$.

נסמן ב- M את מרכז המעגל הגדול.

ב. הוכיחו כי M היא אמצע הקטע KO , וכי KB משיק למעגל הקטן.

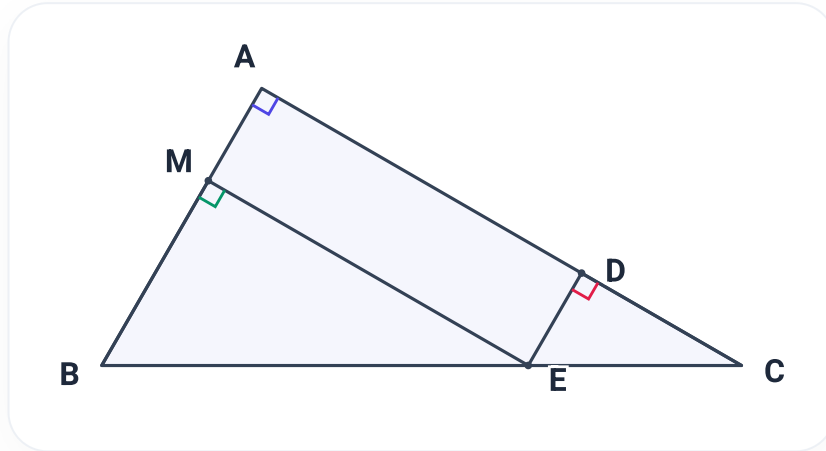
ג. הקטע AB חותך את הקטע KO בנקודה N . הוכיחו כי $\triangle ONA \sim \triangle OAK$.

נתון: $R = 2r$. נסמן ב- S את שטח המשולש ONA .

ד. הביעו באמצעות S את שטח המשולש KAB .

שאלה 5 · משולש ישר-זווית ואנכים מנקודה על היתר: סכום שטחים, $\sin 2\alpha$ ומעגל חוסם

בסרטוט שלפניכם משולש ישר-זווית ABC ($\angle BAC = 90^\circ$). הנקודה E נמצאת על היתר BC כך ש-
 $BE = 2 \cdot EC$. הנקודה D נמצאת על הניצב AC כך ש- $ED \perp AC$. הנקודה M נמצאת על
 הניצב AB כך ש- $EM \perp AB$. נסמן: $\angle ABC = \alpha$, $EC = k$, $45^\circ < \alpha < 90^\circ$.



- א. הביעו באמצעות k ו- α את אורכי הקטעים ME ו- DE .
- נתון כי סכום שטחי המשולשים BEM ו- CED הוא $1.2k^2$.
- ב. מצאו את הערך של α .
- נתון כי אורך רדיוס המעגל החוסם את המשולש AED הוא 10.
- ג. מצאו את הערך של k .

שאלה 6 · פונקציה רציונלית עם פרמטר: קיצון, סקיצה, $k \cdot f(x)$ ושטח

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^4}{(2x^5 - m)^2}$, m הוא פרמטר חיובי.

הביעו את תשובותיכם באמצעות m אם יש צורך.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א. מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

ידוע כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = -1$.

ב. מצאו את הערך של m .

הציבו בפונקציה $f(x)$ את הערך של m שמצאתם וענו על הסעיפים ג-ה.

ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = k \cdot f(x)$, k הוא פרמטר שלילי.

ה. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.

ה. דרך נקודת הקיצון השמאלית של $g(x)$ מעבירים אנך לציר ה- x . נתון כי השטח המוגבל על ידי האנך, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x הוא 1 (השטח שמימין לאנך). מצאו את הערך של k .

שאלה 7 · פונקציה טריגונומטרית זוגית: זווית כפולה, חסמים, קיצון של $f(2x)$ ואינטגרל של נגזרות

נתונה הפונקציה: $f(x) = \cos(2x) - 2\cos(x) + 1$, המוגדרת לכל x .

א. האם הפונקציה $f(x)$ זוגית? נמקו.

ב. הוכיחו כי לכל x מתקיים: $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 4$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים בתחום: $-\pi \leq x \leq \pi$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום: $-\pi \leq x \leq \pi$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = f(2x)$, המוגדרת לכל x .

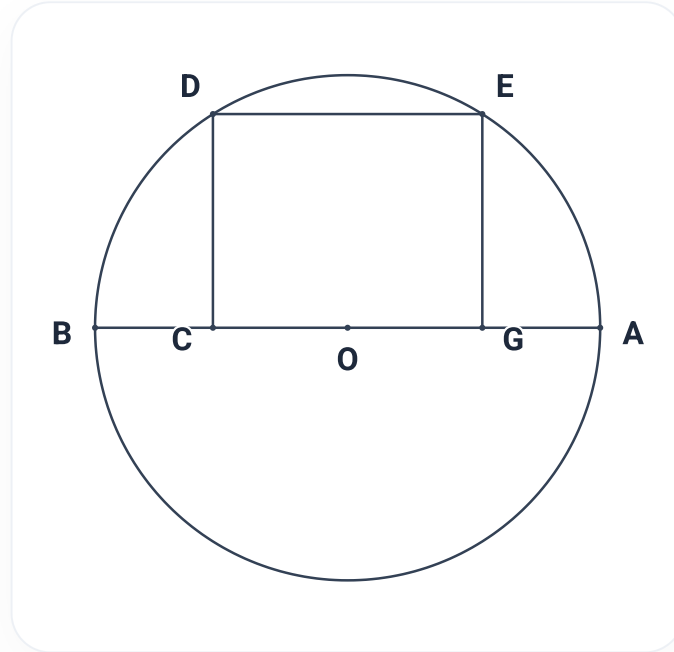
ה. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, וקבעו את סוגן.

ו. נתון כי: $\int_0^{\frac{\pi}{8}} (g'(x) - f'(x)) dx = S$. הביעו באמצעות S את: $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} (g'(x) - f'(x)) dx$. הסבירו את התשובה.

שאלה 8 · מלבן חסום בחצי מעגל: שטח מקסימלי וסכום שטחי משולשים

הקטע AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O ורדיוסו R . על הקוטר מסמנים את הנקודות C ו- G , ועל המעגל מסמנים את הנקודות D ו- E (מאותו צד של הקוטר), כך ש- $CDEG$ הוא מלבן. הנקודה C נמצאת בין B ל- O (ראו סרטוט).

נסמן: $OC = x$.



א. הביעו באמצעות R את הערך של x שבעבורו שטח המלבן $CDEG$ מקסימלי.

הנקודה F נמצאת על הצלע DE .

ב. הביעו באמצעות R את סכום השטחים המקסימלי של המשולשים CDF ו- GEF .

כל הבגריות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math