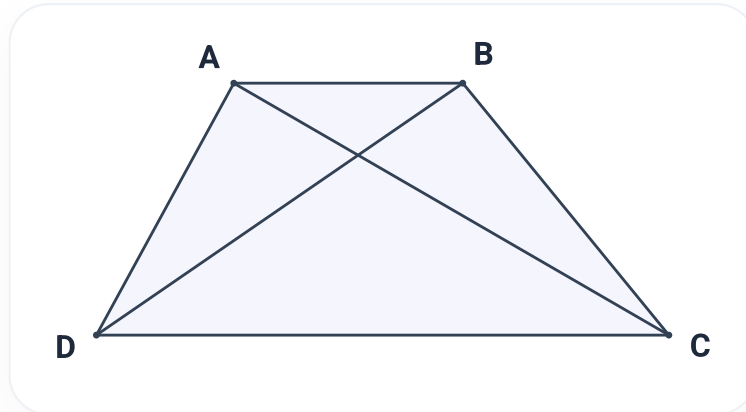


שאלה 1 · שאלות קצרות: יחס שטחים בטרפז, מכפלה טלסקופית באינדוקציה, זהויות של $\cos$ ושיקוף והזזה**של גרף**

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

לפניכם טרפז $ABCD$, $(AB \parallel CD)$.



נתון: שטח המשולש BDC הוא 45 ושטח המשולש ABC הוא 18.

א(1). חשבו את היחס בין אורך הבסיס הגדול ובין אורך הבסיס הקטן של הטרפז $ABCD$.

א(2). חשבו את שטח הטרפז $ABCD$.

ב(1). בעבור כל n טבעי, הוכיחו באינדוקציה או בדרך אחרת את הטענה:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

ב(2). חשבו את המכפלה:

$$\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{100^2}\right)$$

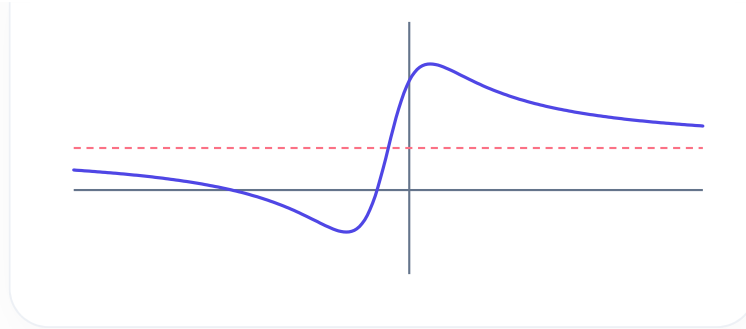
בעבור כל אחת מן הטענות (1)-(2) שלפניכם, קבעו אם היא נכונה לכל x . נמקו.

$$\cos(\pi - x) = \cos(\pi + x) \quad \text{ג(1)}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ג(2)}$$

לפניכם הגרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל x . לפונקציה $f(x)$ אסימפטוטה אופקית שמשוואתה היא: $y = 2$ (ראו סרטוט), ו-2 נקודות קיצון בדיוק: נקודת מקסימום $(1, 6)$ ונקודת מינימום $(-3, -2)$.

$$-f(x)$$



נגדיר את הפונקציה: $g(x) = 3 - f(x)$. גם הפונקציה $g(x)$ מוגדרת לכל x .

ד(1). מצאו את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $g(x)$. נמקו.

ד(2). מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

שאלה 2 · סדרה חשבונית וסדרת הפרשי הריבועים של איברים סמוכים: הפרש, יחס סכומים ואיברים

אמצעים

נתונה סדרה חשבונית A ובה $2n$ איברים (n הוא מספר טבעי). d הוא הפרש הסדרה ($d \neq 0$).

מגדירים סדרה נוספת B באופן הזה: $b_t = a_{t+1}^2 - a_t^2$.

בסדרה B יש $2n - 1$ איברים.

א. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה חשבונית, והביעו באמצעות d את ההפרש שלה.

נסמן ב- S_A את סכום האיברים בסדרה A. נסמן ב- S_B את סכום האיברים בסדרה B.

ב. הוכיחו: $\frac{S_B}{2n-1} = \frac{d \cdot S_A}{n}$.

נתון: $d = 3$, $S_B = 5.8 \cdot S_A$, $S_B - S_A = 1440$.

ג(1). מצאו את n .

ג(2). מצאו את סכום שני האיברים האמצעיים בסדרה A.

שאלה 3 · תחרות אפייה בשלושה שלבים: הסתברות מותנית מיחס, מציאת p , בייס וברנולי

בתחרות אפייה המתמודדים עוברים שלושה שלבים זה אחר זה: שלב המיון, חצי הגמר והגמר. רק מתמודד שעובר את שלב המיון עולה לחצי הגמר, ורק מתמודד שעובר את חצי הגמר עולה לגמר. מתמודד שעובר את הגמר זוכה בפרס. ההסתברות שמתמודד יעבור את שלב המיון היא p ($0 < p < 1$). ההסתברות שמתמודד שעבר את שלב המיון יעבור את חצי הגמר גדולה פי 3 מן ההסתברות שמתמודד יעבור את שלב המיון. ההסתברות שמתמודד יזכה בפרס גדולה פי 4 מן ההסתברות שמתמודד יעבור את שלב המיון ואת חצי הגמר ולא יעבור את הגמר.

א. מצאו את ההסתברות שמתמודד שעבר את שלב המיון ואת חצי הגמר יעבור את הגמר.

85% מן המתמודדים אינם זוכים בפרס.

ב. מצאו את הערך של p .

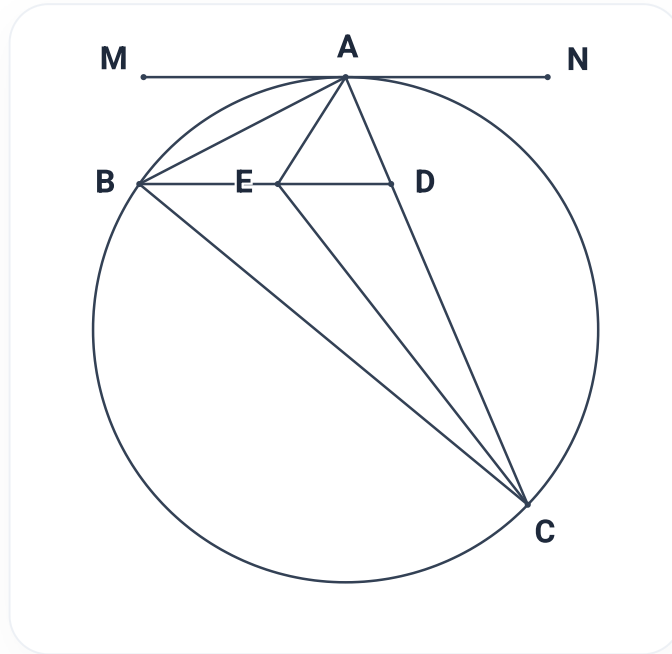
ג. ידוע כי מתמודד לא זכה בפרס. מהי ההסתברות שמתמודד זה עבר את שלב המיון?

מבין כל המתמודדים שלא זכו בפרס בוחרים באקראי 6 מתמודדים.

ד. מהי ההסתברות שלפחות שניים מהם עברו את שלב המיון?

שאלה 4 · ישר המקביל למשיק: דמיון משולשים, יחס שטחים ויחס קטעים במשולש חסום

המשולש ABC חסום במעגל. הישר MN משיק למעגל בנקודה A . דרך הקודקוד B העבירו ישר המקביל ל- MN , והוא חותך את הצלע AC בנקודה D . הנקודה E נמצאת על הקטע BD (ראו סרטוט).



א. הוכיחו כי $\triangle ABD \sim \triangle ACB$.

ב. הוכיחו כי $\frac{AD}{AC} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

נתון: $DC = 3AD$.

ג. מצאו את היחס $\frac{AC}{AB}$.

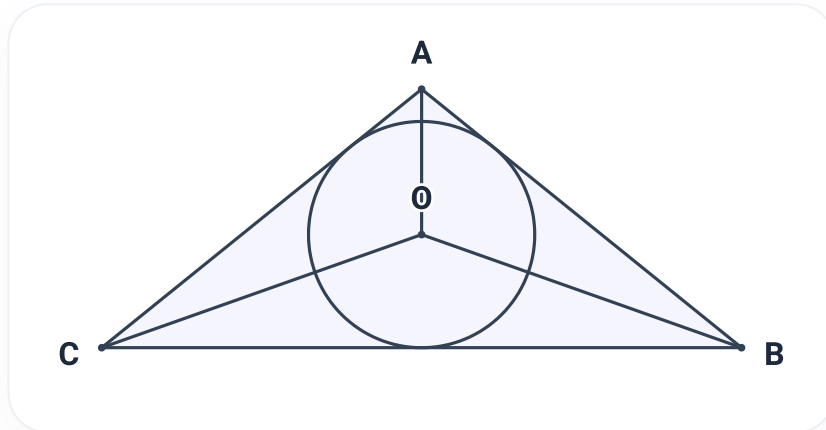
נתון: שטח המשולש ABC הוא 40. נסמן ב- S את שטח המשולש ADE .

ד. הביעו באמצעות S את שטח המשולש BEC .

שאלה 5 · משולש שווה שוקיים ומעגל חסום: המרחק מהקודקוד, זווית כפולה בצורת סינוס ומשפט

הקוסינוסים

במשולש שווה שוקיים ABC ($AC = AB$) חסום מעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו r (ראו סרטוט). נסמן:
 $\angle ACB = 2\alpha$.



א(1). הביעו באמצעות r ו- α את אורך הקטע AO .

א(2). הביעו באמצעות r ו- α את אורך הבסיס BC .

נתון כי אורך הקטע BO גדול פי $\frac{7}{3}$ מאורך הקטע AO .

ב. מצאו את $\sin \alpha$ ואת α .

הציבו $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ וענו על הסעיפים ג-ד. המעגל חותך את הקטע BO בנקודה K . נתון כי אורך הקטע CK הוא $\sqrt{33}$.

ג. מצאו את הערך של r .

הנקודה E נמצאת על הצלע CB . נתון כי שטח המשולש CKE הוא 2.

ד. חשבו את אורך הקטע BE .

שאלה 6 · פונקציה רציונלית אי-זוגית עם פרמטר, הגרף של $|f(x)| - b$ ופונקציית הצטברות

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^4 - a^2}{x^3}$, המוגדרת עבור $x \neq 0$. a הוא פרמטר חיובי.

הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

א(1). מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים, אם יש כאלה.

א(2). הראו שהפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי זוגית.

א(3). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים, אם יש כאלה.

א(4). מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$, אם יש כאלה.

א(5). מצאו את תחום הקעירות כלפי מעלה ($\cup$) ואת תחום הקעירות כלפי מטה ($\cap$) של הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה גם הפונקציה: $g(x) = |f(x)| - b$, b הוא פרמטר חיובי. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת באותו התחום כמו הפונקציה $f(x)$.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ היא: $(-2, -3.75)$.

ד. מצאו את הערכים של a ו- b .

נתונה גם הפונקציה: $s(x) = \int_{-2}^x g(t) dt$, המוגדרת בתחום: $x < -2$.

ה. מהו סוג נקודת הקיצון של $s(x)$? נמקו את תשובתכם.

שאלה 7 · פונקציה טריגונומטרית עם פרמטר: אפסים, שיפוע מערך של $\cos x$, קיצון בתחום סגור, גרף**הנגזרת ואינטגרל $f^2 f'$** נתונה הפונקציה: $f(x) = (b + \cos^2 x) \sin x$, המוגדרת בתחום: $-\pi \leq x \leq \pi$, b הוא פרמטר.**א.** האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית? נמקו את תשובתכם.נתון כי לגרף הפונקציה $f(x)$ יש בדיוק שלוש נקודות חיתוך עם ציר ה- x .**ב.** לפניכם שלוש אפשרויות I-III לערכים של b . קבעו איזו אפשרות יכולה להתאים לפונקציה $f(x)$, ונמקו את קביעתכם. I. $b = 0$. II. $-1 < b < 0$. III. $b > 0$.נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$, כאשר: $\cos x = \frac{1}{3}$, הוא: $-\frac{7}{18}$.**ג.** מצאו את הערך של b .הציבו $b = \frac{1}{2}$ בפונקציה $f(x)$, וענו על הסעיפים ד-ו.**ד.** מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.**ה(1).** סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.**ה(2).** סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = (f(x))^2 \cdot f'(x)$. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת בתחום: $0 \leq x \leq \pi$.**ו.** חשבו את סך השטחים ברביע הראשון המוגבלים על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x .**שאלה 8 · חוט שנחתך לריבוע ולמעגל: סכום שטחים מינימלי**חותכים חוט שאורכו k לשני חלקים. מחלק אחד של החוט יוצרים ריבוע ומן החלק האחר יוצרים מעגל. נסמן ב- x את אורך צלע הריבוע.**א.** הביעו באמצעות k את תחום ההגדרה של x .**ב.** הביעו באמצעות k את אורך צלע הריבוע, שעבורו סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי.**ג.** הראו כי כאשר סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי, אי אפשר לחסום את הריבוע שהתקבל במעגל שהתקבל.כל הבגריות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math