

שאלה 1 · שאלות קצרות: סכום $n(n+2)$ באינדוקציה, $x\sqrt{9-x^2}$ ושטח של f^2 , גרף של $\frac{1}{f-3}$, שטח

משולש ישר זווית שצלעותיו בסדרה הנדסית

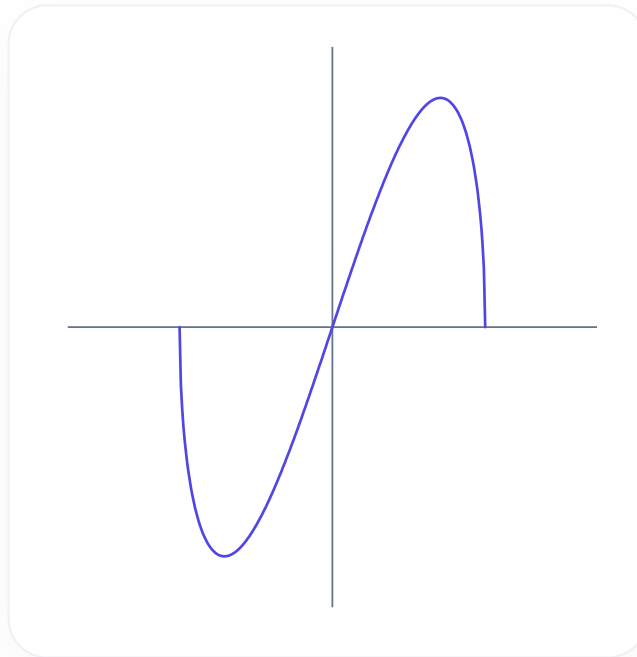
ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

נתון כי השוויון $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$ מתקיים בעבור $n = 2$. הוא פרמטר שונה מ-0.

א(1). מצאו את הערך של b .

א(2). הציבו $b = 6$ והוכיחו באינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי השוויון הנתון מתקיים לכל n טבעי.

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $-3 \leq x \leq 3$.



אחד מן הביטויים I-IV שלפניכם מייצג את הפונקציה $f(x)$.

I. $f(x) = x\sqrt{9-x^2}$

II. $f(x) = -x\sqrt{9-x^2}$

III. $f(x) = x\sqrt{x^2-9}$

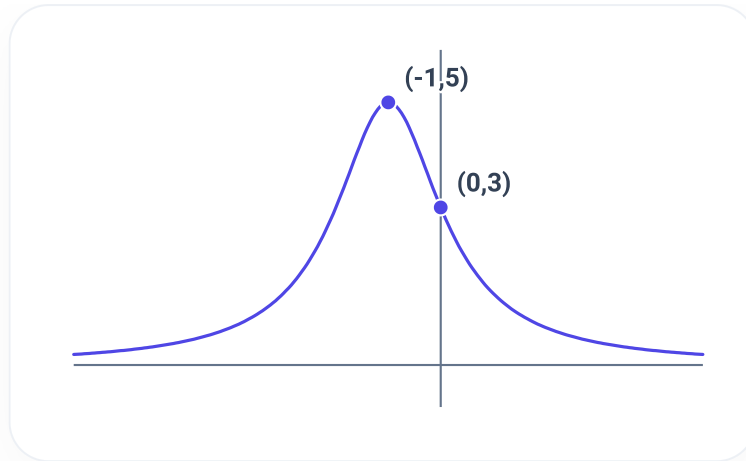
IV. $f(x) = -x\sqrt{x^2-9}$

ב(1). קבעו איזה מן הביטויים מייצג את הפונקציה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.

נתונה הפונקציה $g(x) = (f(x))^2$ המוגדרת בתחום $-3 \leq x \leq 3$.

ב(2). חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x . לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד ואסימפטוטה אופקית אחת בלבד שמשוואתה היא $y = 0$. שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ ושיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y מוצגים בסרטוט.



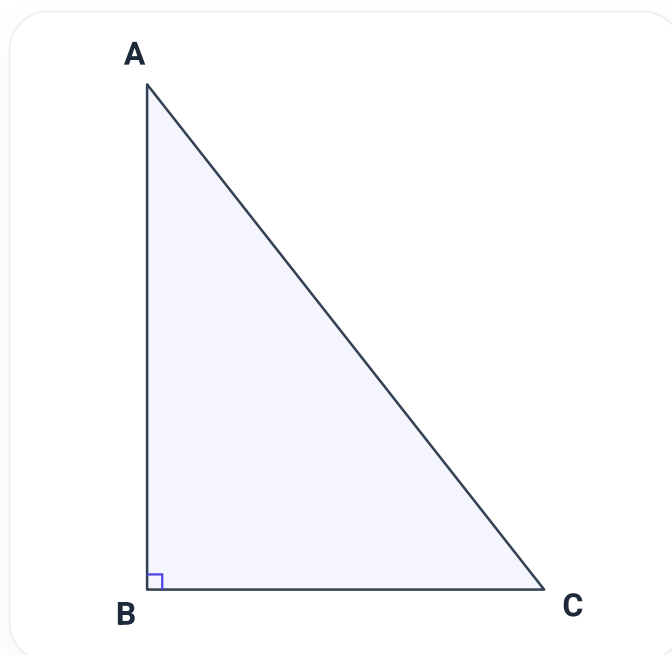
נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)-3}$.

ג(1). כמה אסימפטוטות המאונכות לציר ה- x יש לפונקציה $g(x)$? נמקו את תשובתכם.

ג(2). מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה- y של הפונקציה $g(x)$.

ג(3). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

בסרטוט שלפניכם משולש ישר זווית ABC ($\angle ABC = 90^\circ$).



נתון כי אורכי צלעות המשולש הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית. האיבר הראשון בסדרה שווה לאורך הצלע BC .

נתון: $BC = 3$.

ד(1). האם ייתכן שהסדרה יורדת? נמקו את תשובתכם.

ד(2). מצאו את שטח המשולש ABC (בתשובתכם תוכלו להשאיר שורש).

שאלה 2 · סדרה חשבונית והסדרה $b_n = S_{n+2} - S_n$: סכום מתחלף של ריבועים ותת-סדרה במקומות האי-**זוגיים**

נתונה סדרה חשבונית A עולה שאיבריה הם: $a_1, a_2, a_3, \dots$ והפרשה d . מסמנים ב- S_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה A, לכל n טבעי. מגדירים סדרה נוספת, B, שאיבריה הם: $b_1, b_2, b_3, \dots$. איברי הסדרה B מקיימים: $b_n = S_{n+2} - S_n$ לכל n טבעי.

א(1). האם הסדרה B היא סדרה חשבונית? אם כן, מצאו את הפרשה. נמקו.

א(2). האם הסדרה B זהה לסדרה A? נמקו.

מסמנים ב- T_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה B, לכל n טבעי.

ב. הוכיחו כי לכל n טבעי זוגי מתקיים:

$$T_n = \frac{(b_1 + b_2)(b_1 - b_2) + (b_3 + b_4)(b_3 - b_4) + \dots + (b_{n-1} + b_n)(b_{n-1} - b_n)}{-2d}$$

נתון:

$$b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \dots + b_{37}^2 - b_{38}^2 = -152$$

$$T_5 = -25$$

ג. חשבו את b_1 ואת d (אפשר להיעזר בסעיף ב).

מחברים בזה אחר זה את איברי הסדרה A הנמצאים במקומות האי-זוגיים, החל באיבר הראשון.

ד. מהו המספר המינימלי של איברים שיש לחבר באופן זה כדי שהסכום שיתקבל יהיה מספר חיובי ושלם? נמקו.

שאלה 3 · עץ דו-שלבי תלוי עם פרמטר: זריקות עונשין, הסתברות מותנית וניסוי חוזר עם שלוש תוצאות

בתחרות זריקות עונשין כל משתתף זרק שתי זריקות.

ההסתברות שמשתתף יקלע בזריקה הראשונה היא P ($P > 0.5$).

אם המשתתף קלע בזריקה הראשונה, ההסתברות שיקלע בזריקה השנייה היא $P + 0.2$.

אם המשתתף החטיא בזריקה הראשונה, ההסתברות שיקלע בזריקה השנייה היא $P - 0.3$.

נתון כי ההסתברות שהמשתתף יקלע בדיוק באחת משתי הזריקות היא 0.24.

א. מצאו את P .

משתתף שקלע בשתי הזריקות עולה לשלב הגמר.

ב. ידוע כי משתתף קלע לפחות באחת הזריקות. מהי ההסתברות שהוא עלה לשלב הגמר?

שלושה משתתפים זרקו שתי זריקות כל אחד.

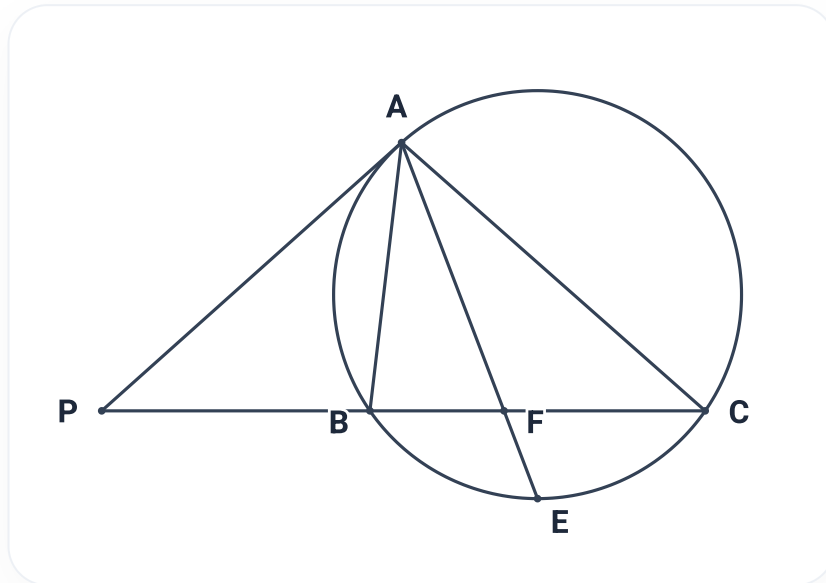
ג. מהי ההסתברות ששניים מבין שלושת המשתתפים עלו לשלב הגמר ואחד מהם החטיא בשתי הזריקות?

n משתתפים זרקו שתי זריקות כל אחד ($n \geq 2$).

ד. הביעו באמצעות n את ההסתברות שלפחות משתתף אחד עלה לשלב הגמר וגם לפחות משתתף אחד לא עלה לשלב הגמר.

שאלה 4 · מעגל: משיק מקודקוד, דמיון, משולש שווה-שוקיים וחוצה זווית

הנקודות A, B ו-C נמצאות על מעגל. נקודה E היא אמצע הקשת BC שאינה מכילה את A, כמתואר בסרטוט שלפניכם. הנקודה A מעבירים משיק למעגל. המשיק חותך את המשך המיתר CB בנקודה P. המיתרים AE ו-BC נחתכים בנקודה F.



א. הוכיחו: $\triangle PAB \sim \triangle PCA$.

נתון: $BC = 5$, $PB = 4$.

ב. חשבו את אורך המשיק PA.

ג. הוכיחו: $PA = PF$.

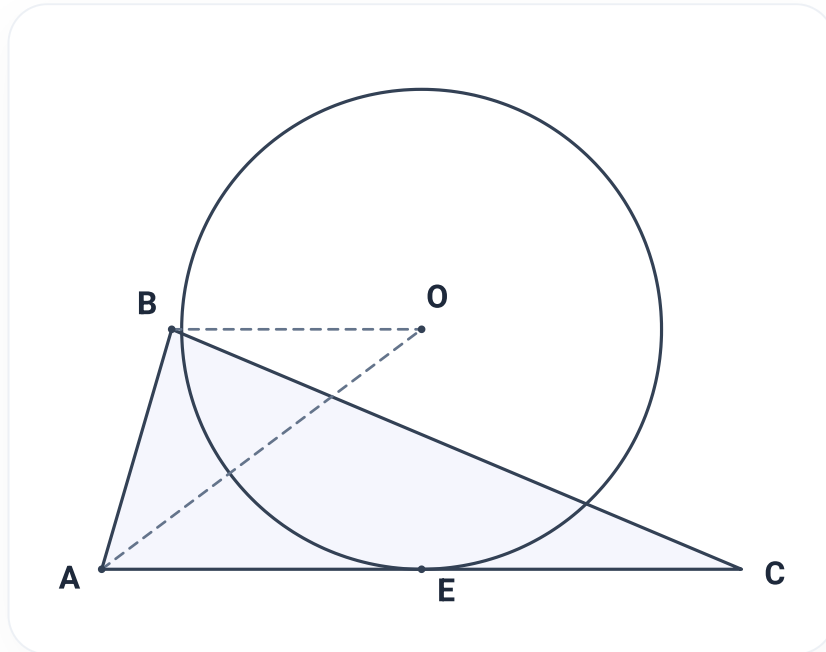
נתון: שטח המשולש ABC הוא 10.

ד. חשבו את שטח המשולש APF.

ה. מהו היחס בין שטח המשולש ABF ובין שטח המשולש AFC? נמקו את תשובתכם.

שאלה 5 · משיקים למעגל מנקודה ומשולש שווה-שוקיים: צלע בעזרת $\sin 2\beta$, יחס שטחים ורדיוס המעגל**החוסם**

נתון מעגל שמרכזו O ורדיוסו R . מן הנקודה A העבירו שני ישרים AB ו-AC המשיקים למעגל. הנקודה E היא נקודת ההשקה של הישר AC למעגל, כמתואר בסרטוט. נתון: $AB = BO$, $AE = CE$. נסמן ב- 2β את הזווית BAC.



(הישר AB משיק למעגל בנקודה B, מעבר לנקודה B, המשך הקטע AB, מעבר לנקודה B).

א. הביעו באמצעות R ו- β את האורך של AB.

נתון כי האורך של AB הוא $\frac{25}{24}R$, והזווית BAC היא זווית חדה.

ב. מצאו את הערך של β .

ג. מצאו את היחס בין שטח המשולש ABC ובין שטח המשולש AOB.

נתון כי האורך של רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 8.

ד. מצאו את הערך של R .

שאלה 6 · פונקציית שורש עם פרמטר: אסימפטוטות שונות ב- $\pm\infty$, קיצון בקצה, הגרף של f^4 ושטח

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$, a הוא פרמטר חיובי. ענו על הסעיפים א-ו. הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

ב. הוכיחו כי הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

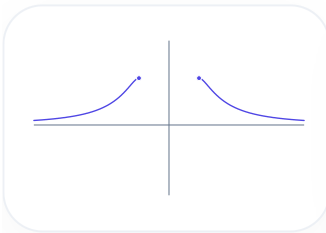
ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

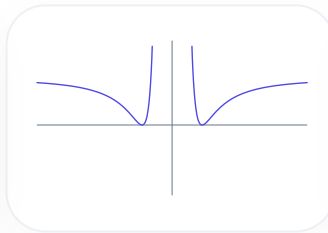
נתונה הפונקציה $g(x) = (f(x))^4$. תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ה(1). מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

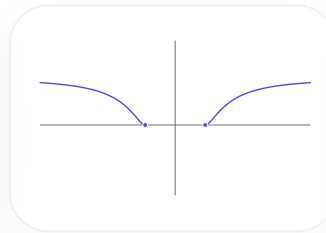
גרף IV



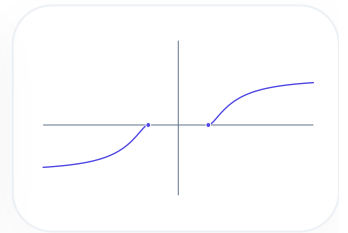
גרף III



גרף II



גרף I



ה(2). קבעו איזה מן הגרפים I-IV שלפניכם מתאר את הפונקציה $g(x)$. נמקו את קביעתכם.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x , ועל ידי הישרים $x = a$ ו- $x = 2a$, הוא 1.75.

ו. מצאו את הערך של a .

שאלה 7 · הפונקציות $\tan x - \frac{1}{x}$ ו- $\cos x$: חיוביות, אי-זוגיות וקיצון באפסים של פונקציה אחרת

נתונה הפונקציה: $f(x) = \tan(x) - \frac{1}{x}$.

ענו על הסעיפים א-ב בעבור התחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה- x .

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בתחום הנתון בשתי נקודות בלבד, ששיעורי ה- x שלהן הם 0.860 ו-3.426 בקירוב.

ב. מצאו את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של הפונקציה $f(x)$.

נתונה גם הפונקציה: $g(x) = x \cos(x)$, המוגדרת לכל x .

ג. האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי-זוגית, או לא זוגית ולא אי-זוגית? הוכיחו את תשובתכם.

ד(1). הראו כי בתחום $0 < x < 2\pi$ שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ שווים לשיעורי ה- x של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x , וקבעו את סוגן.

ד(2). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום: $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

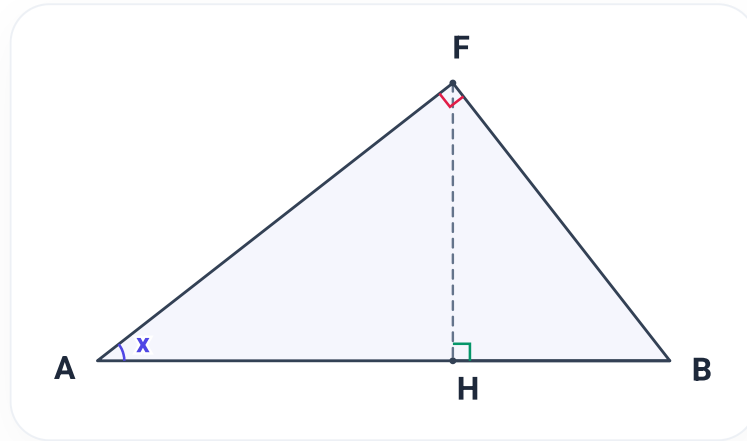
שאלה 8 · בעיית קיצון טריגונומטרית: סכום ניצב וגובה במשולש ישר זווית

הקטע AB הוא היתר במשולש ישר הזווית AFB, $\angle AFB = 90^\circ$, ו-FH הוא הגובה ליתר, כמתואר בסרטוט.

ידוע כי $AF > BF$.

נתון: $\angle FAB = x$.

נסמן את אורך הקטע AB ב- h .



א. מהו תחום הערכים האפשרי בעבור x ? הסבירו את תשובתכם.

ב. הביעו באמצעות x ו- h את סכום האורכים של הקטעים AF ו-FH.

ג. מצאו את הערך של x שבעבורו סכום האורכים של הקטעים AF ו-FH הוא מקסימלי.

ד. בעבור הערך של x שמצאתם בסעיף ג, מצאו את היחס בין שטח המשולש AFH לשטח המשולש BFH.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math