

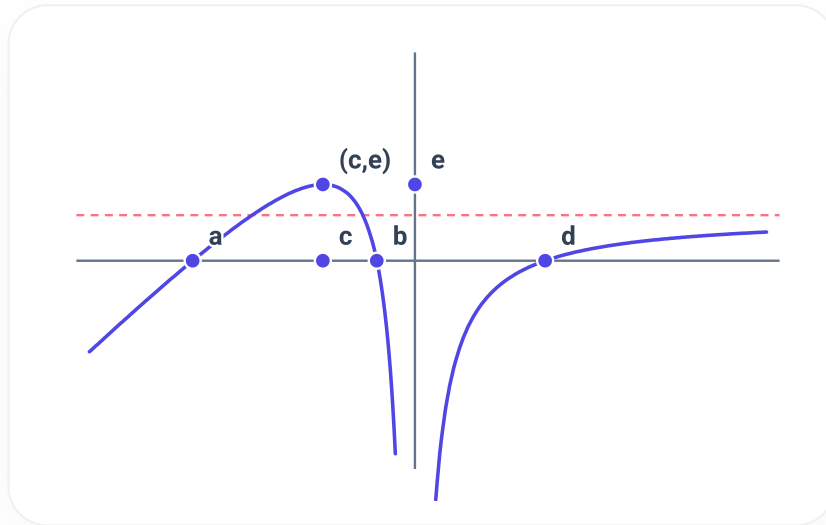
שאלה 1 · שאלות קצרות: אינדוקציה, $f'' - e = h'$, ערך מוחלט עם פרמטר, דמיון במשולש חסום

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקציה מתמטית או בדרך אחרת כי השוויון שלפניכם מתקיים בעבור כל n טבעי:

$$2 + 7 + \dots + \frac{3n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)^2}{2}$$

נתונות הפונקציות: $f(x)$, $f'(x)$ ו- $f''(x)$, המוגדרות לכל $x \neq 0$. בסרטוט שלפניכם מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$. לגרף הפונקציה $f''(x)$ יש שלוש נקודות חיתוך עם ציר ה- x , ושיעוריהן הם: $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(d, 0)$. הנקודה (c, e) היא נקודת הקיצון של הפונקציה $f''(x)$. הישר $y = k$, כאשר $0 < k < e$, הוא אסימפטוטה אופקית של $f''(x)$ כאשר $x \rightarrow \infty$ (מסומן בקו מקווקו).

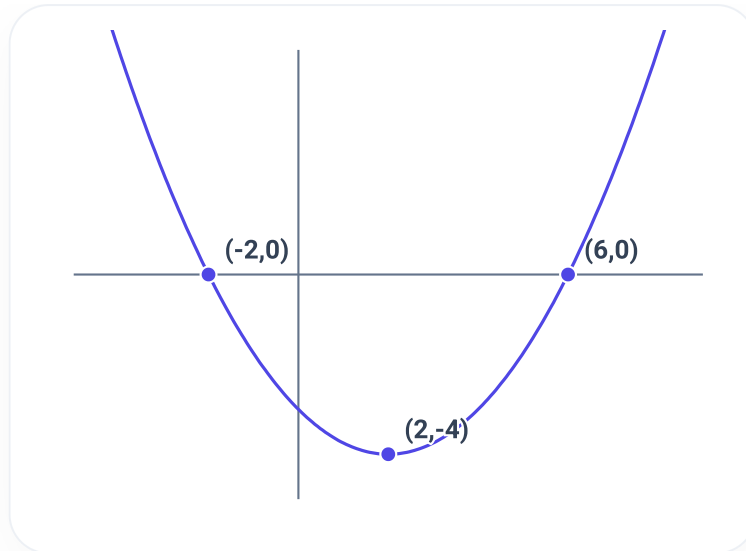


ב(1). הביעו באמצעות a, b, c, d, e, k , אם יש צורך, את תחומי העלייה והירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתונה הפונקציה $h(x)$, המקיימת: $h'(x) = f''(x) - e$. הפונקציה $h(x)$ מוגדרת לכל $x \neq 0$.

ב(2). מצאו כמה נקודות קיצון וכמה נקודות פיתול יש לפונקציה $h(x)$ (אם יש כאלה). נמקו את תשובתכם.

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$, ועליו כתובים כל שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x ושיעורי נקודת המינימום שלה. הפונקציה מוגדרת לכל x .



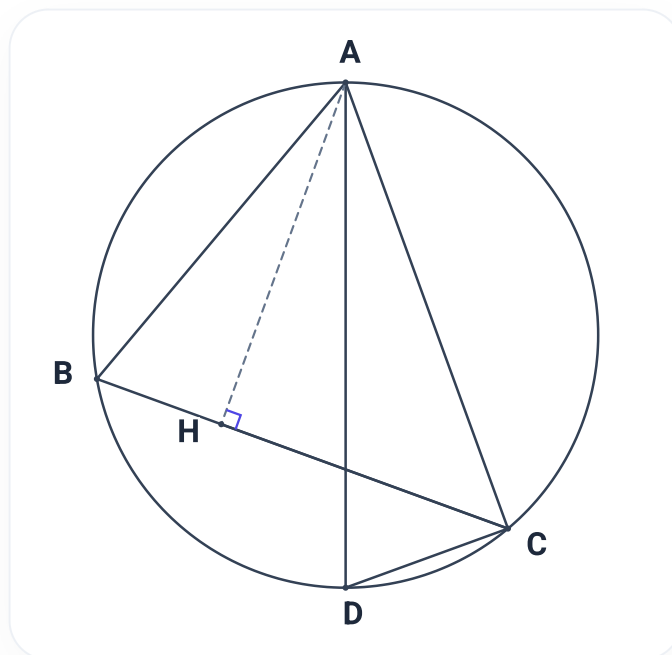
נתונות הפונקציות: $h(x) = |f(x)| - m$, $g(x) = |f(x) - m|$. m הוא פרמטר, $0 < m < 3$.
 ג(1). הביעו באמצעות m , אם יש צורך, את שיעורי נקודת המקסימום של הפונקציה $g(x)$.

ג(2). הביעו באמצעות m , אם יש צורך, את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$, וקבעו את סוגן.

ג(3). לפניהם שתי טענות, I-II. קבעו בעבור כל טענה אם היא נכונה או אינה נכונה. נמקו את קביעותיכם.
 I. $g(x) \geq 0$ לכל ערך של x , ו- $h(x) > 0$ לכל ערך של x .

II. לכל ערך של m בתחום $0 < m < 3$, הישר $y = 4$ חותך את גרף הפונקציה $g(x)$ בארבע נקודות ואת גרף הפונקציה $h(x)$ בשתי נקודות.

המשולש ABC חסום במעגל. הקטע AD הוא קוטר במעגל, ו-AH הוא הגובה לצלע BC במשולש ABC, כמתואר בסרטוט שלפניהם.



ד(1). הוכיחו: $\triangle ADC \sim \triangle ABH$.

נתון: $\angle ACB = 50^\circ$.

ד(2). מצאו את היחס בין שטח המשולש ADC ובין שטח המשולש ABH.

שאלה 2 · סדרה הנדסית מתחלפת בסימן וסדרת $a_n - a_{n+1} + a_{n+2}$: מנה, סכום אין-סופי, סדרה קבועה וסכום מתחלף

a_n היא סדרה הנדסית אין-סופית שאיבריה מתחלפים בסימן, והערך המוחלט של כל איבר בה קטן מהערך המוחלט של האיבר שלפניו. מנת הסדרה היא q .

א. לפניכם שלוש טענות I-III. קבעו איזו מן הטענות נכונה ונמקו את קביעתכם.

I. $q < -1$

II. $-1 < q < 0$

III. $0 < q < 1$

b_n היא סדרה אין-סופית שאיבריה מקיימים $b_n = a_n - a_{n+1} + a_{n+2}$ לכל n טבעי.

ב. הוכיחו כי הסדרה b_n היא הנדסית ומנתה היא q .

נתון כי סכום הסדרה b_n גדול פי 1.56 מסכום הסדרה a_n .

ג. מצאו את הערך של q .

c_n היא סדרה שאיבריה מקיימים $c_n = \frac{b_n}{2 \cdot a_n}$ לכל n טבעי.

נתון כי סכום k האיברים הראשונים בסדרה הוא 46.02.

ד(1). הוכיחו כי הסדרה c_n היא קבועה.

ד(2). מצאו את הערך של k .

החליפו את הסימן של כל אחד מן האיברים שנמצאים במקומות האי-זוגיים בסדרה c_n .

ה. מצאו את סכום k האיברים הראשונים בסדרה c_n לאחר החלפת הסימנים. נמקו את תשובתכם.

שאלה 3 · הסתברות: כדורים כחולים שמוצאים וכדורים אדומים שמוחזרים

בשקית יש שלושה כדורים כחולים וארבעה כדורים אדומים. נועם מוציא באקראי כדור מן השקית. אם הכדור אדום – הוא מחזיר אותו לשקית, ואם הכדור כחול – הוא מניח אותו בצד ולא מחזיר אותו.

נועם מוציא מן השקית שלושה כדורים בזה אחר זה באופן המתואר בתחילת השאלה.

א(1). חשבו את ההסתברות שנועם יניח בצד בדיוק כדור אחד.

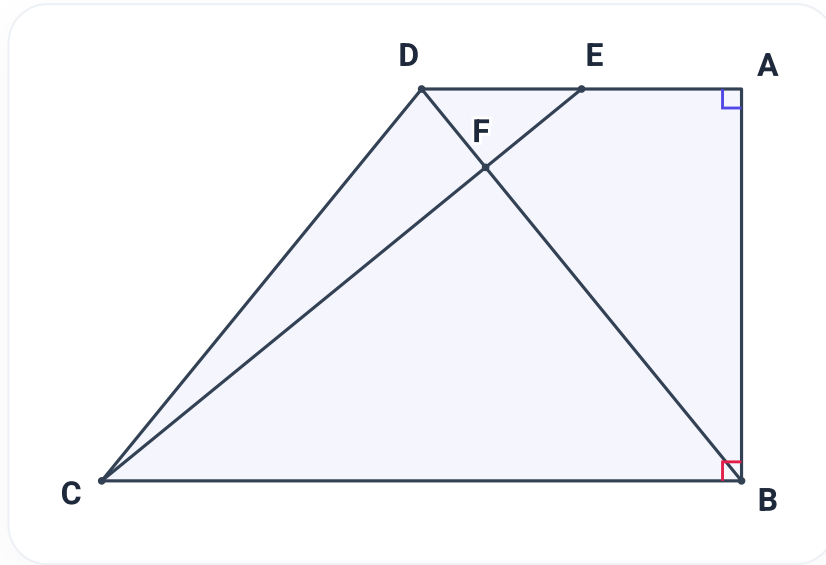
א(2). חשבו את ההסתברות שנועם יניח בצד את הכדור השני שהוציא, אם ידוע כי נועם הניח בצד בדיוק כדור אחד.

ב. נועם מוציא מן השקית n כדורים בזה אחר זה באופן המתואר בתחילת השאלה. הביעו בעזרת n את ההסתברות שנועם יניח בצד כדור אחד לפחות.

ג. נועם קיבל שתי שקיות, כל אחת מהן זהה לשקית המתוארת בתחילת השאלה. נועם מוציא שלושה כדורים מכל אחת משתי השקיות, באופן המתואר בתחילת השאלה. חשבו את ההסתברות שנועם יניח בצד בדיוק שלושה כדורים, שלושתם מאותה שקית.

שאלה 4 · טרפז ישר-זווית ומרובע בר חסימה: דמיון, יחסי שטחים וקוטר המעגל

בטרפז ישר-זווית $ABCD$ ($\angle DAB = 90^\circ$, $AD \parallel BC$), הנקודה E נמצאת על הבסיס AD . הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה F . המרובע $EABF$ הוא בר חסימה במעגל.



א. הוכיחו: $\triangle DAB \sim \triangle BFC$.

נתון: $BC = 2AD$, $DE = EA$.

ב. חשבו את היחס $\frac{EF}{FC}$.

נסמן את שטח המשולש DEF ב- S .

ג. הביעו את שטחי המשולשים DFC ו-BFC באמצעות S .

ד. חשבו את יחס הדמיון בין המשולש DAB ובין המשולש BFC.

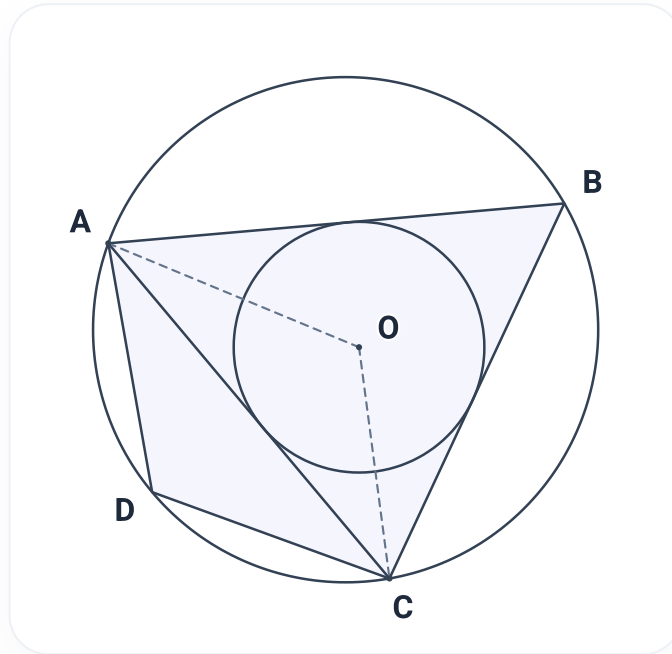
נסמן: $DE = a$.

ה(1). הביעו את אורך האלכסון BD באמצעות a .

ה(2). הביעו את קוטר המעגל החוסם את המרובע EABF באמצעות a .

שאלה 5 · מרובע חסום במעגל ומרכז המעגל החסום במשולש: משפט הסינוסים, שטח ומרחק בין מרכזים

מרובע $ABCD$ חסום במעגל שרדיוסו R . נתון: $DA = DC$ ו- $\angle ADC = 120^\circ$. הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC (ראו סרטוט). נסמן: $\angle CAB = \alpha$.



א(1). מצאו את זווית המשולש AOC (הביעו באמצעות α במידת הצורך).

א(2). הביעו את אורך הקטע AO באמצעות α ו- R .

נתון כי $AO = 1.2R$.

ב. מצאו את גודל הזווית α .

נתון כי שטח המרובע $ABCD$ הוא 40.86 (בקירוב).

ג. מצאו את R .

ד. חשבו את המרחק בין מרכז המעגל החסום את המרובע לבין מרכז המעגל החסום במשולש ABC .

שאלה 6 · פונקציה רציונלית מתוך נגזרתה: אינטגרל, אסימפטוטה, נקודת אי-רציפות סליקה והתאמת גרפים

נתון כי $f'(x) = \frac{-6x^2}{(x^3-a^3)^3}$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$. a הוא פרמטר חיובי. הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ מוגדרות באותו התחום. בסעיפים א-ג הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

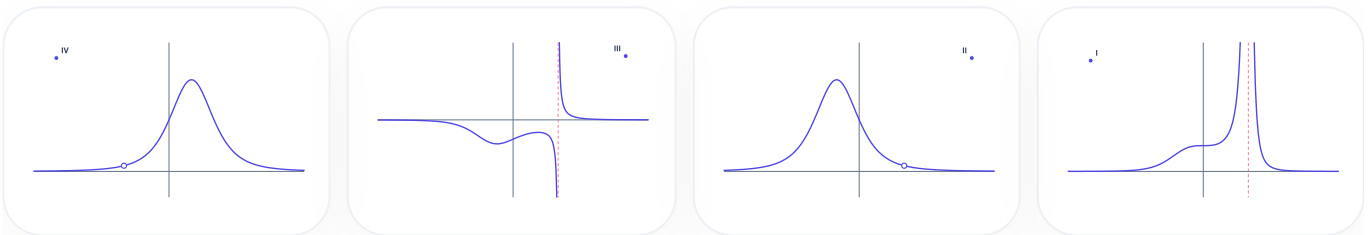
א. מצאו את תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = 0$.

ג. מצאו פונקציה $f(x)$ המקיימת תנאים אלה.

נתונות הפונקציה $g(x) = \frac{x-a}{(x^3-a^3)^2}$ והפונקציה $h(x) = \frac{(x-a)^2}{(x^3-a^3)^2}$. הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ ו- $h(x)$ מוגדרות באותו התחום.



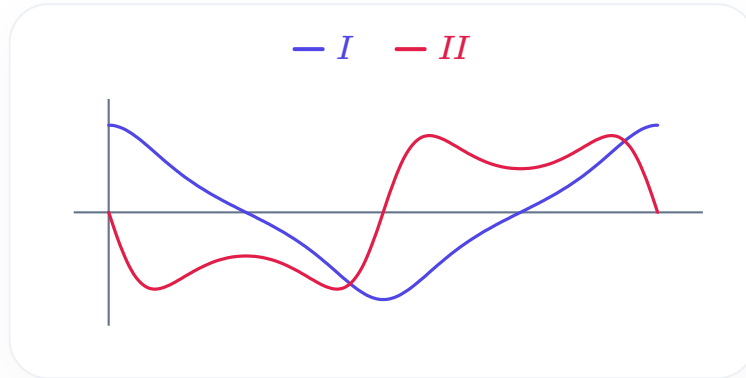
ד. התאימו לכל אחת מן הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ ו- $h(x)$ גרף אפשרי המייצג אותה מבין הגרפים I-IV. נמקו את תשובותיכם.

נתון כי לגרף הפונקציה $h(x-6)$ יש נקודת אי-רציפות סליקה שבה $x = 2.5a$.

ה. מצאו את הערך של a .

שאלה 7 · פונקציה טריגונומטרית רציונלית: גרף הנגזרת, קיצון בתחום סגור והפונקציה

בסרטוט שלפניכם נתונים שני גרפים I-II, בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$. אחד מן הגרפים מתאר את הפונקציה $f(x)$, ואחד מהם מתאר את פונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$. הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ מוגדרות לכל x בתחום הנתון.



א. קבעו איזה מן הגרפים I-II מתאר את הפונקציה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.

נתון כי $f(x) = \frac{\cos x}{1+(\sin x)^2}$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

ב(1). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

ב(2). מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

נתונה הפונקציה $g(x) = |f(x) - \frac{2}{7}|$ המוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

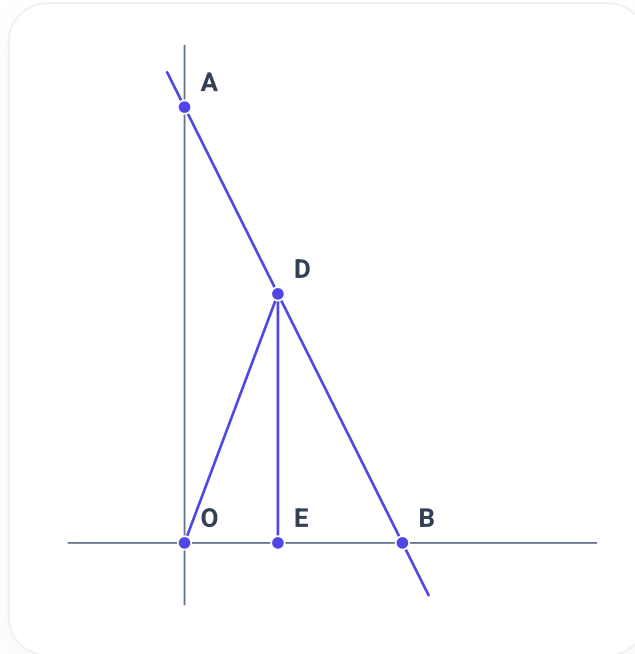
ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x .

ד(1). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ד(2). מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של גרף הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

שאלה 8 · בעיית קיצון: יחס שטחים כשגובה המשולש תלוי ב- p

ישר ששיפועו -2 חותך את החלק החיובי של ציר ה- x בנקודה B , ואת החלק החיובי של ציר ה- y בנקודה A . הנקודה D נמצאת על הישר AB ברביע הראשון. הנקודה E נמצאת על ציר ה- x כך שהקטע DE מקביל לציר ה- y . הנקודה O היא ראשית הצירים, כמתואר בסרטוט. נסמן את אורך הקטע OE ב- p . נתון: שטח המשולש OED הוא $\frac{p(p+1)}{2}$.



א. הביעו באמצעות p את משוואת הישר AB .

ב. מצאו את הערך של p שבעבורו היחס בין שטח המשולש OED ובין שטח המשולש ABO הוא מקסימלי.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math