

שאלה 1 · שאלות קצרות: סכום ריבועי האי-זוגיים, מרובעים בני חסימה, אסימפטוטות של שורש ומשפחה

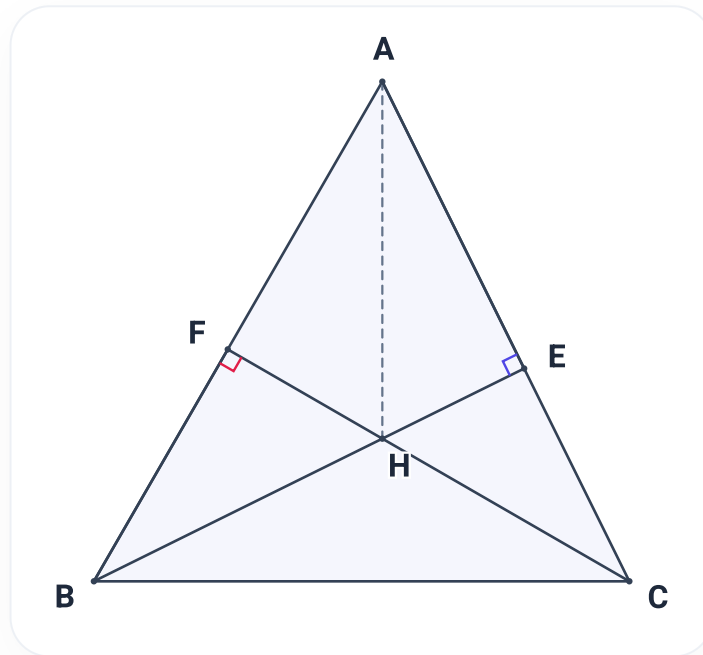
רציונלית

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי בעבור כל n טבעי מתקיים:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{3}$$

במשולש חד-זווית ABC , הגבהים BE ו- CF נפגשים בנקודה H (ראו סרטוט). נתון: $BC = 12$, $AH = 8$.



ב(1). הוכיחו שאפשר לחסום במעגל כל אחד מן המרובעים: $BCEF$, $AFHE$.

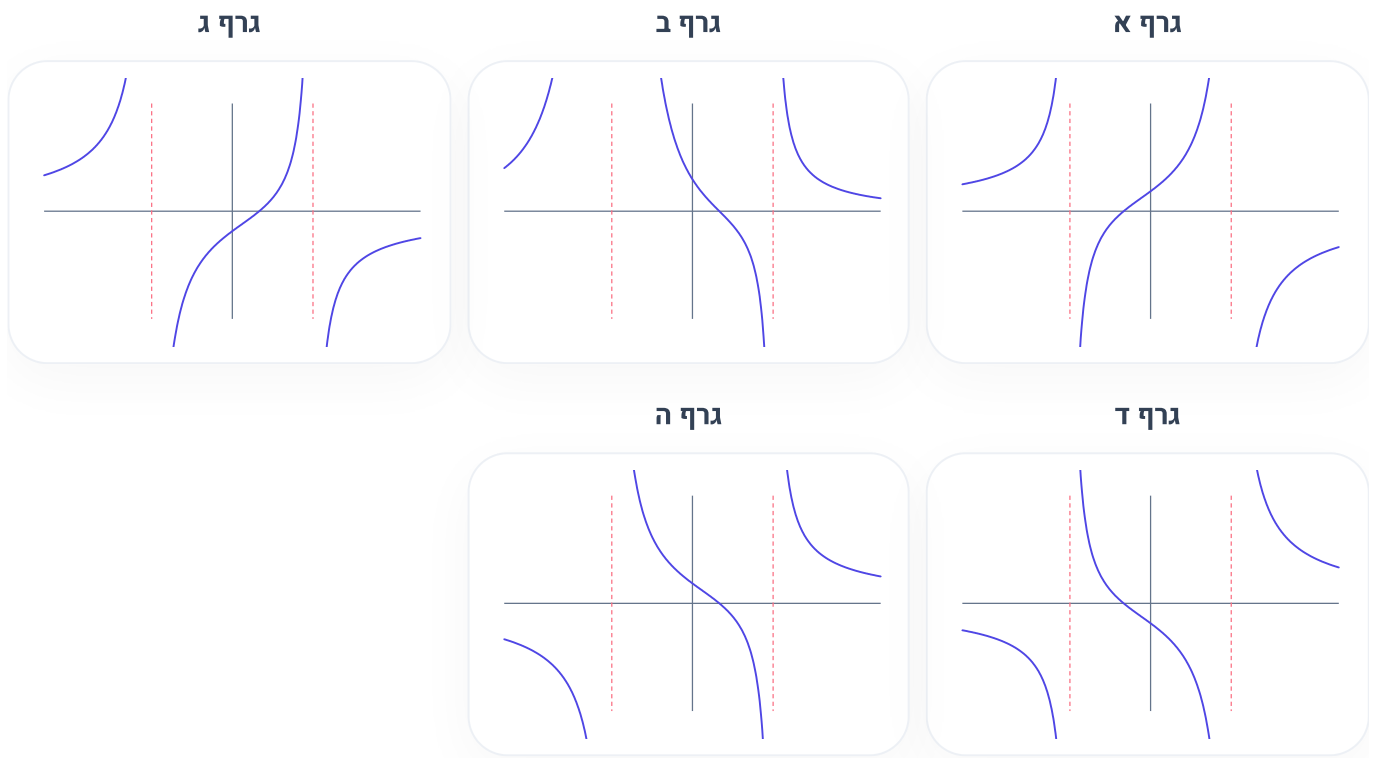
ב(2). מהו סכום השטחים של המעגלים החוסמים את המרובעים: $BCEF$, $AFHE$?

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-2x-8}} + 1$.

ג(1). מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ג(2). ידוע כי האסימפטוטות של גרף הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים, חותכות זו את זו. חשבו את השטח הכלוא בין האסימפטוטות. נמקו את התשובה.

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a \cdot (x-1)}{x^2-9}$, המוגדרת עבור: $x \neq 3$ ו- $x \neq -3$, $a \neq 0$. הוא פרמטר. אחד מן הגרפים א-ה שלפניכם מתאים לפונקציה $f(x)$ בעבור $a > 0$, ואחד מהם מתאים לפונקציה $f(x)$ בעבור $a < 0$.



- ד(1). איזה מן הגרפים מתאים לפונקציה $f(x)$ בעבור $a > 0$? נמקו את התשובה בקצרה.
- ד(2). איזה מן הגרפים מתאים לפונקציה $f(x)$ בעבור $a < 0$? נמקו את התשובה בקצרה.

שאלה 2 · סדרה הנדסית עם מנה שלילית: מכפלת איברים עוקבים, מונוטוניות, סכום אינסופי וסכום מאמצע

הסדרה

הסדרה A היא סדרה הנדסית שאיבריה הם: $a_1, a_2, a_3, \dots$ ומנתה היא q , $-1 < q < 0$. נתון: $a_1 = 2$.
 הסדרה B מוגדרת לכל n טבעי באופן הזה: $b_n = a_n \cdot a_{n+1}$.

א. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, והביעו את מנתה באמצעות q .

ב. לפניכם שלוש טענות I-III. קבעו עבור כל טענה אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעותיכם.

I. כל איברי הסדרה B שליליים.

II. הסדרה B היא סדרה עולה.

III. האיברים שנמצאים במקומות האי-זוגיים בסדרה A יוצרים סדרה עולה.

נתון: הסדרה B היא סדרה אין-סופית שסכומה הוא $-\frac{8}{3}$.

ג. מצאו את ערכו של q .

נתונה סדרה הנדסית נוספת C, המוגדרת לכל n טבעי באופן הזה: $c_n = \frac{a_n}{b_n}$. נתון: $c_2 + c_3 + \dots + c_m = 86$,
 m הוא מספר טבעי.

ד. מצאו את הערך של m .

שאלה 3 · הסתברות: מגמת מחשבים וחוג רובוטיקה - משלים, טבלה דו-ממדית והוצאה ללא החזרה

במחקר שנעשה בקרב תלמידי שכבה בבית ספר מסוים נבדק הקשר בין לימוד במגמת מחשבים ובין השתתפות בחוג רובוטיקה. 60% מן התלמידים שלומדים במגמת מחשבים משתתפים בחוג רובוטיקה.

א. בוחרים באקראי 4 תלמידים שלומדים במגמת מחשבים (הוצאה עם החזרה). מהי ההסתברות שבחרו לפחות תלמיד אחד שמתקף בחוג ולפחות תלמיד אחד שאינו משתתף בחוג?

נתון כי 56% מן התלמידים אינם לומדים במגמת מחשבים ואינם משתתפים בחוג, ו- $\frac{1}{5}$ מן התלמידים שאינם לומדים במגמת מחשבים משתתפים בחוג.

ב. כמה אחוזים מן התלמידים לומדים במגמת מחשבים?

בשכבה 200 תלמידים סך הכול.

ג. כמה מן התלמידים לומדים במגמת מחשבים ואינם משתתפים בחוג?

בוחרים באקראי 3 מן התלמידים שאינם משתתפים בחוג (הוצאה ללא החזרה).

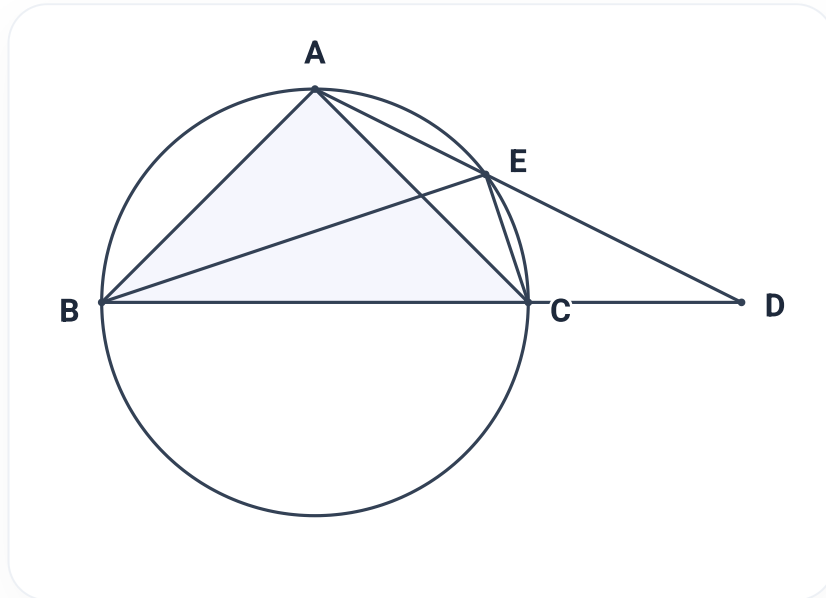
ד(1). מהי ההסתברות ששני התלמידים הראשונים שנבחרו לומדים במגמת מחשבים, והתלמיד השלישי אינו לומד במגמה?

ד(2). מהי ההסתברות שבדיוק שניים מן התלמידים שנבחרו לומדים במגמת מחשבים, אם ידוע שהתלמיד הראשון שנבחר לומד במגמה?

שאלה 4 · משולש ישר זווית ושווה שוקיים חסום במעגל וחותר מנקודה על המשך היתר: זוויות היקפיות, דמיון

ויחס שטחים

ABC הוא משולש ישר זווית ושווה שוקיים ($AB = AC$, $\angle BAC = 90^\circ$) החסום במעגל. הנקודה D נמצאת על המשך הצלע BC , כמתואר בסרטוט. הקטע AD חותך את המעגל בנקודה E .



א. הוכיחו: $\angle BEC = 90^\circ$, $\angle AEB = \angle CED = 45^\circ$.

ב. הוכיחו: $\triangle AEB \sim \triangle CED$.

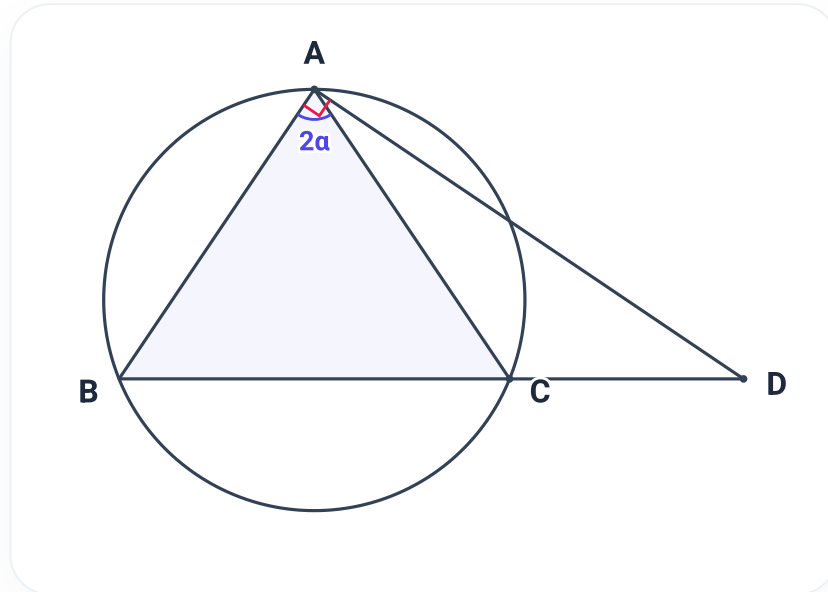
ג. הוכיחו: $\frac{AE}{CE} = \frac{AC}{CD}$.

נתון כי שטח המשולש AEB גדול פי 2 משטח המשולש CED .

ד. מצאו פי כמה גדול שטח המשולש ABD משטח המשולש CED .

שאלה 5 · משולש שווה-שוקיים חסום במעגל ואנך לשוק: רדיוסים חוסמים, שטח ויחס שטחים

בציור שלפניכם מתואר משולש שווה-שוקיים ABC , $AB = AC$, שחסום במעגל שרדיוסו R . האריכו את הבסיס BC עד לנקודה D , כך ש- $AD \perp AB$. נתון: $\angle BAC = 2\alpha$.



א. הוכיחו כי רדיוס המעגל החוסם את משולש ABD שווה לרדיוס המעגל החוסם את משולש ACD .

ב. הביעו את שטח משולש ACD באמצעות R ו- α .

נסמן ב- m את היחס בין שטח המשולש ACD לבין שטח המשולש ABC .

ג(1). האם ייתכן כי $m = 1$? נמקו את תשובתכם.

ג(2). נתון כי $m = 0.25$. מצאו את גודלי זוויות המשולש ABC .

שאלה 6 · חקירת $\sin^3 x \cos^3 x$, הפונקציה $\frac{1}{\sqrt{f}}$ ומרחק מינימלי בין הגרפים

נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin^3(x) \cdot \cos^3(x)$ המוגדרת בתחום: $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

א(1). האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי זוגית? נמקו.

א(2). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

א(3). מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

א(4). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$.

ב(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ב(2). מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

ב(3). סרטטו (בקו מקווקו) סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ באותה מערכת צירים שבה סרטטתם את גרף הפונקציה $f(x)$.

ענו על סעיף ג בעבור התחום שבו מוגדרות שתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

ג. מצאו את המרחק המינימלי בין הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

שאלה 7 · פונקציה טריגונומטרית עם $\frac{1}{\cos x}$: זוגיות, משיק אופקי, מקסימום מתחת למינימום ומפגש של g עם

$\frac{4}{9}$

נתונה הפונקציה $f(x) = \cos x + \frac{1}{\cos x} + a$, בתחום $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$. a הוא פרמטר.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי זוגית? נמקו את תשובתכם.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ משיק לישר $y = 1$ בשתי נקודות.

ג. מצאו את הערך של a .

הציבו $a = 3$ וענו על הסעיפים ד-ו.

ד. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

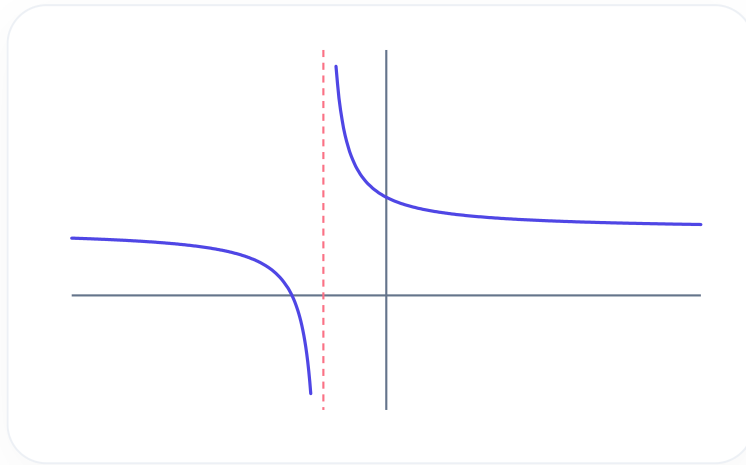
ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונות הפונקציה $g(x) = f(x) - k$ והפונקציה $h(x) = \frac{4}{g(x)}$, שתיהן בתחום $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$. k הוא פרמטר, $k \neq 1$, $k \neq 5$.

ו. מצאו את הערך של k שבעבורו גרף הפונקציה $g(x)$ וגרף הפונקציה $h(x)$ נפגשים בכל אחת מנקודות הקיצון שלהן.

שאלה 8 · פונקציה רציונלית עם פרמטר: משיק ושטח מינימלי של משולש

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{a}{x+1} + 4$. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $x \neq -1$. a הוא פרמטר חיובי.



- א.** מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.
- הנקודה C נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$, ושיעור ה- x שלה הוא 1. דרך הנקודה C העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$.
- ב.** הביעו באמצעות a את משוואת המשיק.
- המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה A ואת הישר $x = -1$ בנקודה B . D היא נקודה ששיעוריה הם $(-1, 0)$.
- ג.** הביעו באמצעות a את שטח המשולש ADB .
- ד.** מצאו את הערך של a שבעבורו שטח המשולש ADB הוא מינימלי.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math