

שאלה 1 · שאלות קצרות: אינדוקציה, מרכז המעגל החסום, פונקציה אי-זוגית ונגזרת, שורש של פולינום

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א(1). הוכיחו באינדוקציה מתמטית או בדרך אחרת כי השוויון שלפניכם מתקיים בעבור כל n טבעי:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

א(2). האם הביטוי: $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \dots + (2n-1)(2n+1)$ שווה ל- $\frac{2n+1}{n}$ בעבור כל n טבעי? נמקו את תשובתכם.

המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O. הנקודה K היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC. נסמן: $\angle ACB = \alpha$. הביעו באמצעות α את היחס בין רדיוס המעגל החסום את משולש ABC, ובין רדיוס המעגל החסום את משולש AKB.
 ב(1).

נתון כי היחס שהבעתם בת-סעיף (1) שווה ל-1, וכי הצלע CB משיקה למעגל החסום את משולש AKB. הוכיחו כי המשולש ABC הוא משולש שווה-צלעות.
 ב(2).

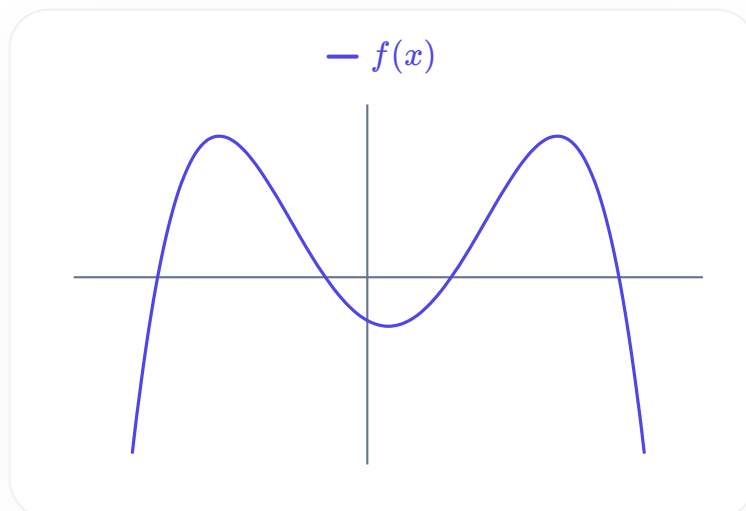
נתון כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית ורציפה המוגדרת לכל x . לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מקסימום אחת בלבד ובה: $x = -2$. אחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x היא בנקודה $(3, 0)$.
 ג(1). סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון כי הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה זוגית המוגדרת לכל x . פונקציית הנגזרת $g'(x)$ מקיימת:
 $g'(x) = -f(x)$. נתון: $g(3) = 1$.

ג(2). מצאו את שיעורי נקודות המקסימום של הפונקציה $g(x)$.

ג(3). לפניכם שני היגדים I-II. קבעו עבור כל היגד אם הוא נכון או לא נכון. נמקו את קביעותיכם.
 I. $g(x) \leq 1$ לכל x .
 II. שיעור ה- y של נקודת המינימום של הפונקציה $g(x)$ הוא בין 1 ל-3.

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x . אחד מן הביטויים I-IV שלפניכם מייצג את הפונקציה $f(x)$.



ד(1). קבעו איזה מן הביטויים מייצג את הפונקציה $f(x)$, נמקו את קביעתכם:

$$I. f(x) = -x(x+5)(x-6)$$

$$II. f(x) = -(x+5)(x+1)(x-2)(x-6)$$

$$III. f(x) = (x+5)(x+1)(x-2)(x-6)$$

$$IV. f(x) = -(x+5)(x-1)(x-2)(x-6)$$

נתונה הפונקציה: $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

ד(2). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ד(3). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

$$\text{נתון: } \int_2^5 g(x) dx = k$$

ד(4). הביעו באמצעות k את הערך של: $\int_0^3 [3 \cdot g(x+2) - 2] dx$.

שאלה 2 · סדרה הנדסית: מכפלת האיברים הצמודים לאיבר האמצעי, סדרת ההופכיים וסכום אין-סופי

נתונה סדרה הנדסית אין-סופית A שהאיבר הכללי שלה הוא a_n ומנתה היא q .

$$A. \text{ הוכיחו כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } a_2 \cdot a_{2n} = a_n \cdot a_{n+2}$$

בעבור $2k+1$ האיברים הראשונים בסדרה A מתקיים כי מכפלת שני האיברים הצמודים לאיבר האמצעי (האיבר שלפניו והאיבר שאחריו) שווה: $-1,536 \cdot a_2$. נתון: $a_{2k-2} = -384$.

ב. מצאו את q (שתי אפשרויות).

$$\text{נתון: } a_1 = 3$$

ג(1). קבעו אם הסדרה A היא סדרה עולה, סדרה יורדת או סדרה לא עולה ולא יורדת. נמקו את התשובה.

ג(2). מצאו את k .

מן הסדרה A בונים את הסדרה האין-סופית B באופן הזה: $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \dots$.

ד. הוכיחו שהסדרה B היא סדרה הנדסית.

בסדרה B מחליפים את הסימן של כל האיברים במקומות האי-זוגיים כך שמתקבלת הסדרה C שלפניכם:

$$\dots, -\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, -\frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \dots$$

ה. מצאו את סכום הסדרה C .

שאלה 3 · ברנולי: משחק בן 6 שלבים עם ניקוד שונה לכל שלב - מציאת p , ניקוד מצטבר והסתברות מותנית

במשחק מחשב יש 6 שלבים. ההסתברות לעבור כל אחד מן השלבים היא p , בלי תלות בשלבים האחרים (שחקן מנסה את כל 6 השלבים). ידוע כי ההסתברות ששחקן יעבור לפחות שלב אחד היא 0.999271.

א. מצאו את p .

ב. מצאו את ההסתברות ששחקן יעבור 4 שלבים בדיוק.

מספר הנקודות שמקבלים על מעבר שלב זהה למספר השלב: על מעבר שלב 1 מקבלים נקודה אחת, על מעבר שלב 2 - שתי נקודות, וכן הלאה.

ג. מצאו את ההסתברות ששחקן יצבור 19 נקודות לפחות.

ד. מצאו את ההסתברות ששחקן יצבור 6 נקודות בדיוק.

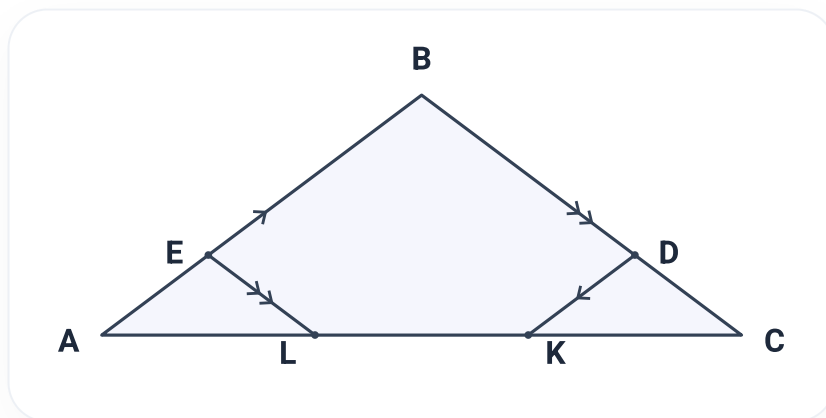
ידוע ששחקן מסוים עבר 2 שלבים בדיוק.

ה. מצאו את ההסתברות שהוא צבר 6 נקודות בדיוק.

שאלה 4 · משולש שווה-שוקיים: מקבילים לשוקיים, דלתון ומרובע בר-חסימה

בציור שלפניכם מתואר משולש שווה-שוקיים ABC , $BA = BC$. הנקודות L ו- K נמצאות על הבסיס AC . דרך הנקודה K העבירו ישר המקביל לשוק BA , והוא חותך את השוק BC בנקודה D . דרך הנקודה L העבירו ישר המקביל לשוק BC , והוא חותך את השוק BA בנקודה E .

נתון: $AL = LK = KC$.



א. חשבו את: $\frac{BD}{DC}$.

הקטעים DL ו- EK נפגשים בנקודה G .

ב. הוכיחו כי המרובע $BDGE$ הוא דלתון.

נתון: $AC = 24$. היקף המרובע $EDKL$ הוא 34.

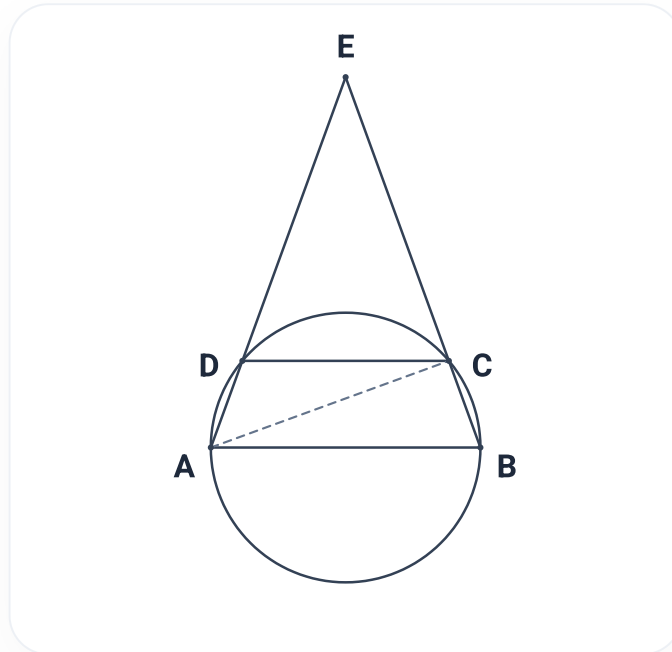
ג. חשבו את אורך הקטע BG .

ד. האם קיימת נקודה F שנמצאת על הישר BG שעבורה המרובע $BDFE$ הוא בר-חסימה במעגל? נמקו את תשובתכם.

שאלה 5 · טרפז חסום שבסיסו קוטר והמשכי השוקיים: משפט הסינוסים, יחס שטחים ותיכון

נתון טרפז ABCD ($AB \parallel DC$), החסום במעגל. הבסיס AB הוא קוטר המעגל. המשכי הצלעות AD ו-BC נפגשים בנקודה E, כמתואר בסרטוט.

נסמן: $\angle CDE = \alpha$, $AC = k$.



א(1). מצאו את זוויות המשולש ACE (הביעו באמצעות α אם יש צורך).

א(2). הביעו באמצעות α ו- k את אורכי הצלעות AB ו-DC.

נתון כי שטח המשולש ABE גדול פי 2 משטח המשולש DCE.

ב. מצאו את גודל הזווית α .

ג. מצאו את הערך של k שבעבורו אורך התיכון לצלע EC במשולש AEC הוא $4\sqrt{5}$.

שאלה 6 · חקירת $x^3 + \frac{1}{x^3}$, זיהוי גרפים של f , f' ו- $f \cdot f'$, ואינטגרל של $f \cdot f'$

נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? הוכיחו את התשובה.

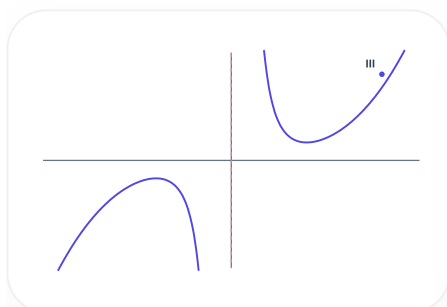
א(3). מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתונות שתי פונקציות: $f'(x)$ ו- $g(x)$. $f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של $f(x)$, ו- $g(x)$ מקיימת:

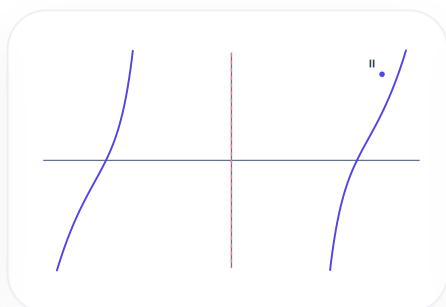
$g(x) = f(x) \cdot f'(x)$. הפונקציות $f'(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות באותו התחום כמו הפונקציה $f(x)$.

כל אחד מן הגרפים I-III שלפניכם מתאר את אחת הפונקציות: $f(x)$, $f'(x)$ ו- $g(x)$.

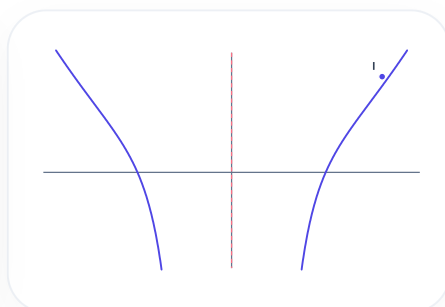
גרף III



גרף II



גרף I



ב. לכל אחת מן הפונקציות כתבו איזה גרף מתאר אותה. נמקו את התשובה.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x .

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים: $x = \frac{1}{2}$ ו- $x = 2$.

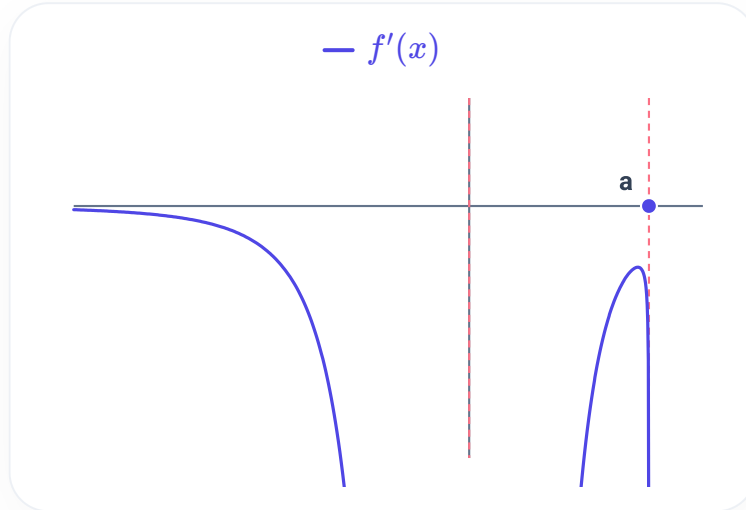
ה. נתון: $a > 1$ הוא פרמטר. חשבו את: $\int_a^1 g(x) dx$.

נתונה הפונקציה: $h(x) = \int_1^x f'(t) dt$. נתון כי הפונקציה $h(x)$ מוגדרת בתחום $\frac{1}{2} \leq x$.

ו. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$, וקבעו את סוגן.

שאלה 7 · פונקציית שורש מתוך גרף הנגזרת: מונוטוניות, פיתול, זיהוי ביטוי, פרמטר משיפוע ושטח

נתונה הפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום: $x \leq a$, $x \neq 0$. a הוא פרמטר חיובי. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$. פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת בתחום: $x < a$, $x \neq 0$. לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש שלוש אסימפטוטות המאונכות לצירים שמשוואותיהן: $x = 0$, $x = a$, $y = 0$. בתחום: $x < 0$ פונקציית הנגזרת $f'(x)$ יורדת. הישר $x = 0$ הוא אסימפטוטה גם לגרף הפונקציה $f(x)$. $f(a) = 0$.



א(1). מצאו את תחום העלייה ואת תחום הירידה של הפונקציה $f(x)$ (הביעו את תשובתכם באמצעות a , אם יש צורך). נמקו.

א(2). כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$? נמקו.

נתון כי הישר: $y = 0$ הוא אסימפטוטה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטוטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$, בהתאם לתשובתכם לתת סעיף א(2).

נתון כי אחד מן הביטויים IV-I שלפניכם מייצג את הפונקציה $f(x)$: I. $\frac{\sqrt{a-x}}{x^2}$ II. $\frac{\sqrt{x-a}}{x^2}$ III. $\frac{\sqrt{a-x}}{x^3}$ IV. $\frac{\sqrt{x-a}}{x^3}$.

ג. איזה מן הביטויים IV-I מייצג את הפונקציה $f(x)$? נמקו.

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x = -1$, הוא: $-\frac{23}{4}$.

ד. מצאו את הערך של a .

ה. הציבו $a = 3$ וחשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $(f(x))^2$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר: $x = 1$.

שאלה 8 · פונקציית שורש $x\sqrt{6-x^2}$: תחום, סימן, סקיצה ומלבן בעל היקף מקסימלינתונה הפונקציה: $f(x) = x\sqrt{6-x^2}$.**א(1).** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.**א(2).** מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.ידוע כי לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות קיצון פנימיות ונקודת פיתול אחת.**ב.** סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון על גרף הפונקציה $f(x)$. הנקודה C היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם החלק החיובי של ציר ה- x . מן הנקודה A העבירו שני אנכים: אנך אחד לציר ה- x החותך אותו בנקודה B, ואנך נוסף לישר $x = \sqrt{6}$ החותך אותו בנקודה D.

ג. מצאו את שיעורי הנקודה A שבעבורה היקף המלבן ABCD הוא מקסימלי.כל הבגריות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math