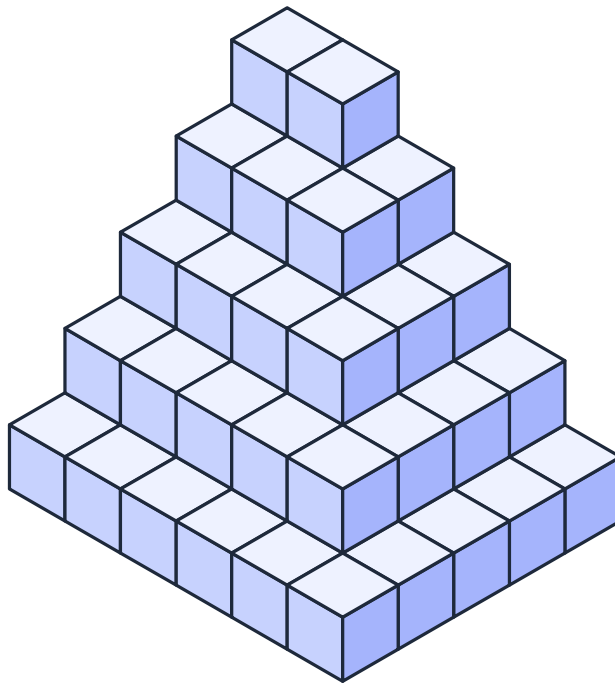


שאלה 1 · שאלות קצרות: סדרה חשבונית בטרפז, סכום מכפלות עוקבים, פישוט טריגונומטרי ו- $\frac{1}{h(x)}$ מגרף

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. נתון מרובע ABCD שבו גודלי הזוויות מהווים סדרה חשבונית עולה. איברי הסדרה הם: a_1, a_2, a_3, a_4 . הוכיחו כי אם מתקיים: $\angle A = a_1$, $\angle B = a_2$, $\angle C = a_3$, $\angle D = a_4$, אז המרובע ABCD הוא טרפז.

נתון מגדל קוביות ובו 5 קומות (ראו ציור). הקומה התחתונה בנויה מ-30 קוביות המסודרות בצורת מלבן של 5×6 קוביות. הקומה שמעליה בנויה מ-20 קוביות המסודרות בצורת מלבן של 4×5 קוביות. וכך הלאה עד לקומה העליונה, שבה יש 2 קוביות (1×2).



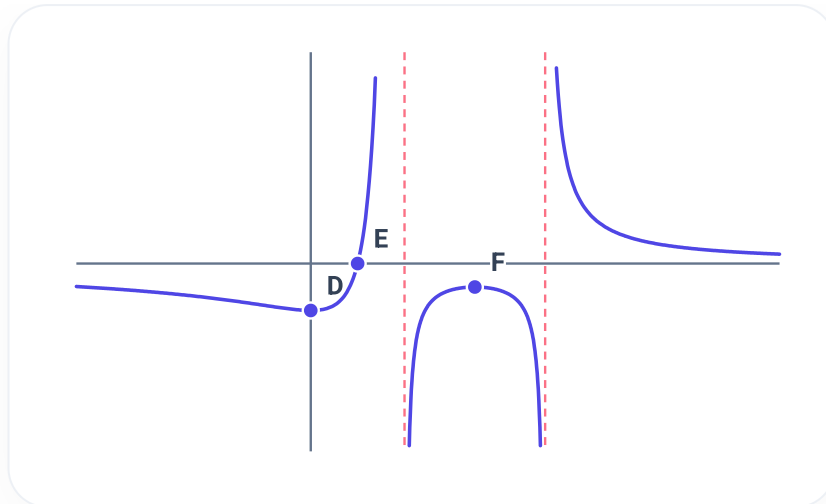
תוכלו להיעזר בנוסחה (לכל n טבעי): $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

ב(1). כמה קוביות סך הכול דרושות כדי לבנות באותו אופן מגדל שבו 8 קומות?

ב(2). נתון מגדל ובו 12 קומות הבנוי באותו אופן שבו בנוי המגדל המתואר בתחילת סעיף ב. כמה קוביות צריך להוסיף למגדל זה, כדי שיהיה בו 60 קומות הבנויות באותו אופן? פרטו את חישוביכם.

ג. נתונה הפונקציה: $f(x) = [\sin(x + \pi) + \cos(x + \frac{\pi}{2})]^2 + 4(\cos(-x))^2 - 3$. המוגדרת לכל x . האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות חיתוך עם ציר ה- x ? נמקו את תשובתכם.

הגרף שלפניכם מתאר את הפונקציה $h(x)$ שתחום ההגדרה שלה הוא: $x \neq 2$, $x \neq 5$. הישרים: $x = 2$, $x = 5$, $y = 0$ הם אסימפטוטות של הפונקציה $h(x)$. הנקודה $D(0, -1)$ היא נקודת המינימום היחידה של הפונקציה $h(x)$, הנקודה $F(3.5, -0.5)$ היא נקודת המקסימום היחידה של הפונקציה $h(x)$, והנקודה $E(1, 0)$ היא נקודת החיתוך היחידה של גרף הפונקציה $h(x)$ עם ציר ה- x .



ד(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה: $\frac{1}{h(x)}$.

ד(2). בכמה נקודות נפגשים הגרף של $h(x)$ והגרף של $\frac{1}{h(x)}$? נמקו את תשובתכם.

שאלה 2 · סדרה הנדסית בת $3n$ איברים, סדרה נגזרת וסכומים אין-סופיים במקומות זוגיים ואי-זוגיים

נתונה סדרה הנדסית שבה: $3n$ איברים (n הוא מספר טבעי). כל איברי הסדרה: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{3n}$ הם חיוביים. סכום איברי הסדרה ללא שני האיברים הראשונים גדול פי 9 מסכום איברי הסדרה ללא שני האיברים האחרונים. נתון כי סכום n האיברים האחרונים בסדרה גדול פי 6561 מסכום n האיברים הראשונים בסדרה.

א. מצאו את n .

המשיכו את הסדרה הנתונה, כך שנוצרה סדרה הנדסית אין-סופית. נתון: B היא סדרה אין-סופית המקיימת לכל k טבעי: $b_k = \frac{1}{a_k \cdot a_{k+1}}$.

ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, ומצאו את מנתה.

בסדרה B כופלים כל איבר שנמצא במקום זוגי ב-5. נתון כי לאחר ההכפלה, סכום האיברים שנמצאים במקומות האי-זוגיים גדול ב- $\frac{3}{5}$ מסכום האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים.

ג. מצאו את a_1 .

שאלה 3 · טבלה דו-ממדית בפרמטר: התנדבות בקרב בנים ובנות

בבית ספר גדול נערך סקר ובו נבדק אם התלמידים מתנדבים בקהילה. בסקר השתתפו תלמידים רבים – בנים ובנות. בסקר נמצא שמספר הבנות המתנדבות גדול פי 2 ממספר הבנים המתנדבים, ומספר הבנות שאינן מתנדבות גדול פי $1\frac{1}{2}$ ממספר הבנות המתנדבות. נסמן ב- p את ההסתברות לבחור באקראי בן מתנדב מבין כלל המשתתפים בסקר.

א. מצאו את ההסתברות לבחור באקראי בת מתנדבת מבין כלל הבנות שהשתתפו בסקר.

ב. בוחרים באקראי ארבע בנות מבין הבנות שהשתתפו בסקר. מצאו את ההסתברות שבדיוק שלוש מהן מתנדבות.

ג(1). הביעו באמצעות p את ההסתברות לבחור באקראי בן שאינו מתנדב מבין כלל המשתתפים בסקר.

ג(2). הראו כי תחום הערכים האפשרי בעבור p הוא: $0 < p < \frac{1}{6}$.

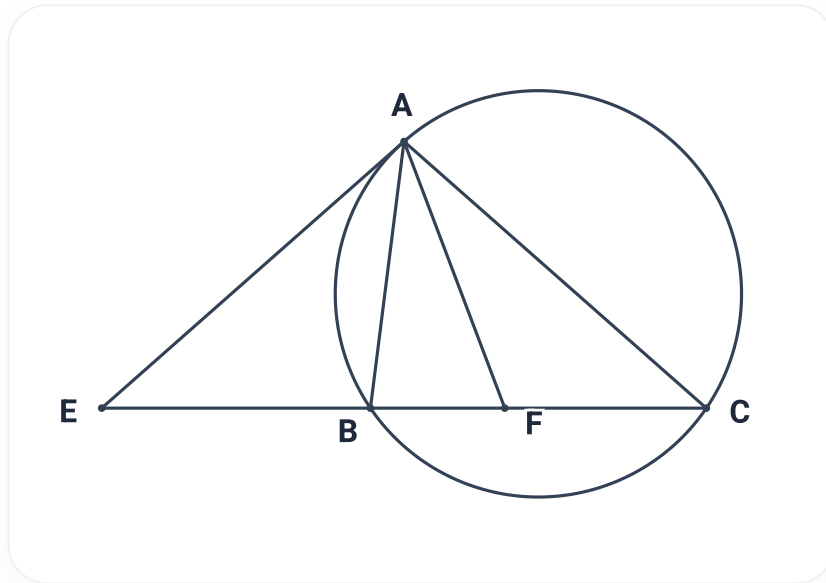
ידוע כי ההסתברות לבחור באקראי בת מבין משתתפי הסקר שאינם מתנדבים גדולה פי 2 מההסתברות לבחור באקראי בן מבין משתתפי הסקר שאינם מתנדבים.

ד. מצאו את הערך של p .

ה. האם המאורעות "להתנדב" ו"להיות בת" תלויים זה בזה? נמקו את תשובתכם.

שאלה 4 · משולש חסום שבו $\angle B = 2\angle C$ ומשיק בקודקוד: משפט הסינוסים ויחסי שטחים

המשולש ABC חסום במעגל. המשיק למעגל בנקודה A חותך את המשך הצלע CB בנקודה E. חוצה הזווית BAC חותך את הצלע BC בנקודה F (ראו סרטוט).



א. הוכיחו: $\angle AEB = \angle ABC - \angle ACB$.

נתון: $\frac{BC}{AB} = \frac{5}{4}$, $\angle ABC = 2\angle ACB$.

ב(1). הוכיחו: $AE = AC$.

ב(2). מצאו את היחס: $\frac{AC}{AB}$.

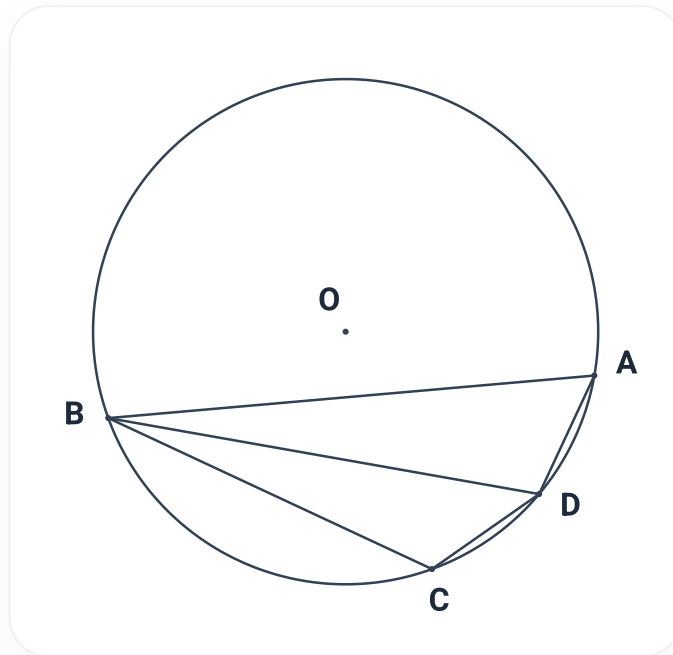
ב(3). מצאו את היחס בין שטח המשולש ABF ובין שטח המשולש ACF.

נסמן את שטח המשולש ABF ב- S .

ג. הביעו באמצעות S את שטח המשולש AEC.

שאלה 5 · מרובע חסום במעגל: מיתרים נתונים, משוואה ריבועית ב- $\cos \alpha$ ויחס גבהים

מרובע ABCD חסום במעגל שרדיוסו R ומרכזו O (ראו סרטוט). נסמן: $\angle DAB = \alpha$, α היא זווית חדה.



א. הביעו את אורך האלכסון BD באמצעות α ו- R .

נתון: $BC = R\sqrt{2}$, $CD = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

ב. חשבו את α .

נתון: BD הוא חוצה זווית ABC.

ג. חשבו את גודל הזווית ABD.

נסמן ב- h_1 את הגובה שיורד מקודקוד A במשולש ABD, וב- h_2 את הגובה שיורד מקודקוד O במשולש BOD.

ד. חשבו את $\frac{h_1}{h_2}$.

שאלה 6 · פונקציה רציונלית עם פרמטר במכנה: חקירה, גרף מעל גרף ושטח

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2-4}{(x-a)^2}$, $0 < a < 2$ הוא פרמטר.

ענו על התת-סעיפים (1)-(5). הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

א(3). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

א(4). מצאו את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

א(5). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{x^2}{(x-a)^2}$, המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקציה $f(x)$.

ב(1). הוכיחו כי גרף הפונקציה $g(x)$ נמצא כולו מעל גרף הפונקציה $f(x)$.

ב(2). הביעו באמצעות a את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, על ידי הישר $x = -1$ ועל ידי ציר ה- y .

שאלה 7 · חקירת $x + \sqrt{x^2 + 16}$, השיקוף $-f(-x)$ והשוואת אינטגרלים

נתונה הפונקציה: $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 16}$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x (אם יש כאלה).

א(3). מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

א(4). מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה ($\cup$) וכלפי מטה ($\cap$) של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $h(x) = -f(-x)$. הפונקציות $f(x)$ ו- $h(x)$ מוגדרות באותו תחום.

ג. באותה מערכת צירים שבה סרטטתם סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, הוסיפו בקו מקווקו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.

נתון: $a > 0$ הוא פרמטר.

ד. סדרו את הביטויים I-III שלפניכם מן הקטן ביותר אל הגדול ביותר (כתבו בצד שמאל את מספרו של הביטוי הקטן ביותר וכן הלאה).

$$I. \int_a^{a+1} (f(x) - h(x)) dx$$

$$II. \int_{-a-3}^{-a-2} (f(x) - h(x)) dx$$

$$III. \int_{a+1}^{a+2} (f(x) - h(x)) dx$$

שאלה 8 · בעיית קיצון טריגונומטרית במקבילית: קטע מקודקוד לנקודה על צלע

נתונה מקבילית $ABCD$ שבה $AB = 2BC$. הנקודה E נמצאת על הצלע CD כך ש- $DE = 2CE$.
נסמן: $\angle BCD = x$. נתון: שטח המשולש BCE הוא 12.

א. הביעו באמצעות x את אורך הצלע BC .

ב. חשבו את האורך המינימלי של הקטע BE .

כל הבגריות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math