

שאלה 1 · שאלות קצרות מודרכות: אינדוקציה על n זוגי, הסתברות מותנית, תחומי הגדרה של שורש, $f^2 f'$

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

נתון השוויון $4 + 16 + 36 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, שבו n הוא מספר טבעי זוגי.

א(1). בדקו כי השוויון מתקיים בעבור $n = 2$ ובעבור $n = 4$.

א(2). k הוא מספר טבעי זוגי. רשמו את האיבר שנוסף לאגף שמאל כאשר עוברים מ- $n = k$ ל- $n = k + 2$.

א(3). הוכיחו באינדוקציה כי השוויון מתקיים לכל n טבעי זוגי.

במועדון קוראים בדקו אילו ספרים שאלו החברים: רומן, ספר קומיקס, או את שניהם. 12% מן החברים שאלו רק רומן. מספר החברים ששאלו רק רומן קטן פי 3 ממספר החברים ששאלו גם רומן וגם ספר קומיקס. $\frac{4}{5}$ מן החברים ששאלו ספר קומיקס, שאלו גם רומן. בוחרים באקראי חבר מועדון.

ב(1). הראו כי ההסתברות שחבר המועדון שנבחר שאל גם רומן וגם ספר קומיקס היא 0.36.

ב(2). מצאו את ההסתברות שחבר המועדון שנבחר שאל לפחות ספר אחד מבין השניים.

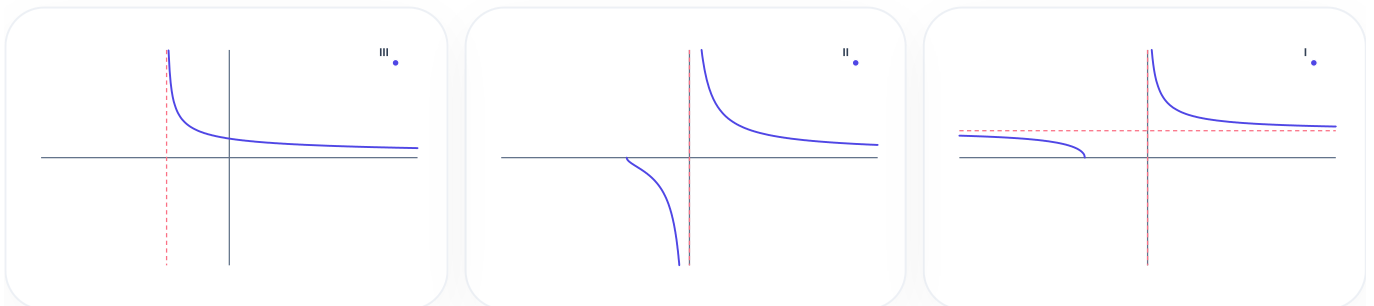
ב(3). ידוע שחבר המועדון שנבחר שאל לפחות ספר אחד. מה ההסתברות שהוא שאל את שני הספרים?

נתונות הפונקציות: $h(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x}}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$.

ג(1). מצאו את תחום ההגדרה של כל אחת מן הפונקציות.

ג(2). קבעו בעבור כל אחת מן הפונקציות אם היא מקבלת ערכים שליליים, ואם כן - באיזה תחום.

לפניכם הגרפים I-III.



ג(3). התאימו לכל אחת מן הפונקציות $f(x)$, $g(x)$ ו- $h(x)$ את הגרף שלה מבין הגרפים I-III. נמקו.

נתונות הפונקציות $f(x) = \frac{8x}{x^2+4}$ ו- $g(x) = f^2(x) \cdot f'(x)$.

ד(1). מצאו את $f'(x)$, והראו כי $f'(x)$ היא פונקציה זוגית.

ד(2). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x .

ד(3). הראו כי $\left(\frac{f^3(x)}{3}\right)' = g(x)$.

ד(4). חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

שאלה 2 · סדרה הנדסית: סדרת הופכי מכפלות וסכום אין-סופי - מודרך

נתונה סדרה הנדסית A שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \dots$.

נתון: $a_5 = 162$, $a_2 = -6$.

א. מצאו את המנה q של הסדרה A ואת האיבר הראשון a_1 .

בונים מאיברי הסדרה A סדרה אין-סופית B שאיבריה מקיימים $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$ לכל n טבעי.

ב. הראו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית שמנתה $\frac{1}{9}$, ומצאו את b_1 .

ג. הסבירו מדוע לסדרה B יש סכום, וחשבו אותו.

בונים סדרה C שאיבריה הם $\frac{k}{a_1 \cdot a_2}$, $\frac{k}{a_3 \cdot a_4}$, $\frac{k}{a_5 \cdot a_6}$, $\dots$, כאשר $k \neq 0$ הוא פרמטר.

ד(1). הראו כי C היא סדרה הנדסית שמנתה $\frac{1}{81}$, והביעו את c_1 באמצעות k .

ד(2). נתון $S_C = 9 \cdot S_B$. מצאו את k .

שאלה 3 · הסתברות: טבלה דו-ממדית מנתונים יחסיים, מותנית, איחוד וברנולי

במפעל גדול נערך משאל בין כל עובדי משמרת הבוקר וכל עובדי משמרת הערב: האם הם בעד מעבר לשבוע עבודה מקוצר. מבין המשתתפים במשאל לא היו נמנעים.

40% מן המשתתפים בעד ההצעה, ו-75% מן המשתתפים שבעד ההצעה הם עובדי משמרת הבוקר. מספר עובדי משמרת הבוקר שבעד ההצעה שווה למספר עובדי משמרת הערב שנגד ההצעה.

א. בנו טבלה דו-ממדית של ההסתברויות (משמרת ועמדה) והשלימו אותה.

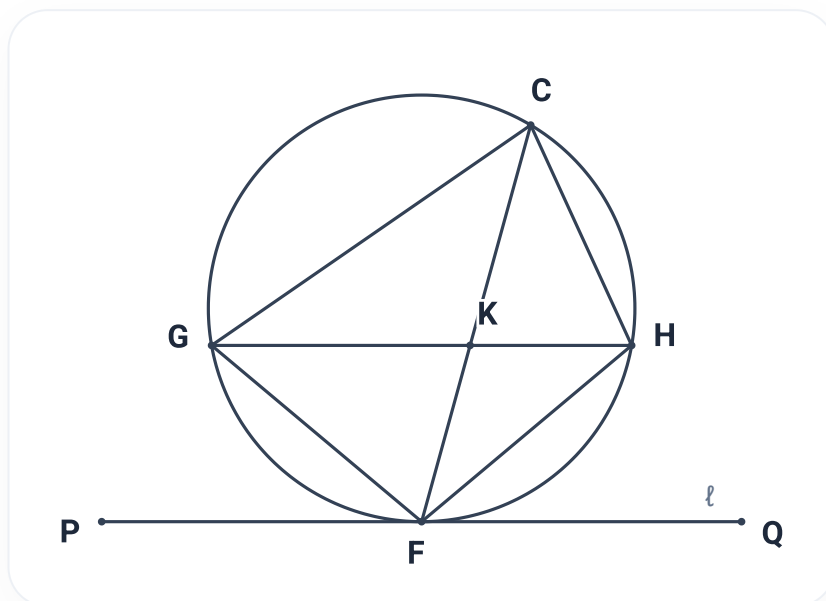
ב. בחרו באקראי עובד ממשמרת הערב. מהי ההסתברות שהוא נגד ההצעה?

ג. בחרו באקראי עובד. מהי ההסתברות שהוא ממשמרת הערב או בעד ההצעה (או שניהם)?

ד. בוחרים באקראי 4 עובדים ממשמרת הערב. מהי ההסתברות שבדיוק 2 מהם בעד ההצעה?

שאלה 4 · משיק ומיתר מקביל לו: מיתרים שווים, חוצה זווית ודמיון

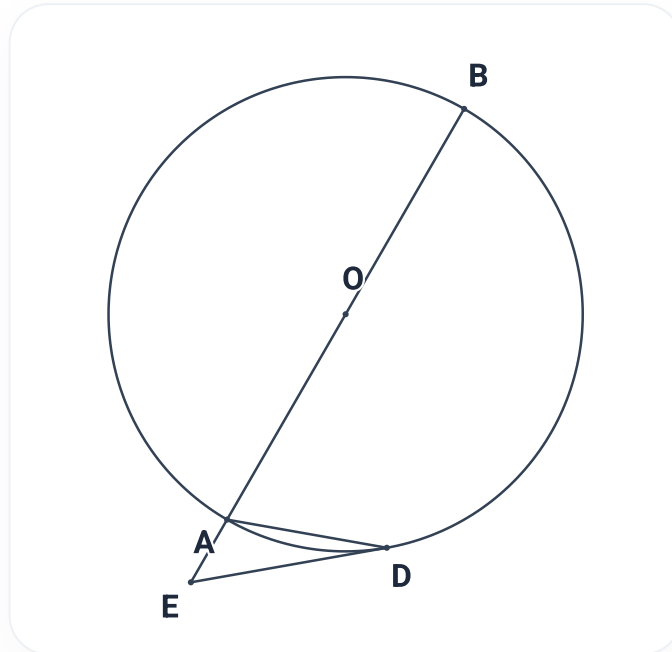
הישר ℓ (שעליו הנקודות P ו- Q) משיק למעגל בנקודה F . המיתר GH מקביל לישר ℓ . הנקודה C נמצאת על המעגל, בצד של המיתר GH שאינו מכיל את F . המיתר CF חותך את GH בנקודה K (ראו סרטוט).



- א. הוכיחו: $FG = FH$. (היעזרו בזווית שבין הישר ℓ למיתר FG).
- נתון: $\angle GCH = 80^\circ$.
- ב. הסבירו מדוע $\angle GCF = \angle FCH$, ומצאו את גודל הזווית $\angle FGH$.
- ג. הוכיחו: $\triangle FGK \sim \triangle FCG$.
- נתון: $FK = 4$, $KC = 5$.
- ד. מצאו את אורך המיתר FG .

שאלה 5 · מעגל, משיק וקוטר: אורך ושטח במשפט הפיטגורס ומשוואה עם $\cos 2\alpha$

AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R ומרכזו O . המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשך הקוטר AB (מעבר לנקודה A) בנקודה E (ראו סרטוט). נסמן: $\angle ADE = \alpha$.



א. הראו כי $\angle ABD = \alpha$, וכי $\angle AED = 90^\circ - 2\alpha$.

ב. הראו כי $AD = 2R \sin \alpha$, והביעו באמצעות R ו- α את אורך הקטע AE .

ג. הביעו באמצעות R ו- α את שטח המשולש ADE .

ד. נתון כי $AE = R$. מצאו את α .

שאלה 6 · חקירת $\frac{4(x+1)^2}{x^2+1}$ והשטח בין $\frac{-f'}{f^2}$ לציר ה- x (מודרך)

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4(x+1)^2}{x^2+1}$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. הראו כי $f'(x) = \frac{8(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$, ומצאו את שיעורי נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$.

ד(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ד(2). הראו כי $g(x)$ היא הנגזרת של $\frac{1}{f(x)}$, וחשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x בתחום $0 \leq x \leq 1$.

שאלה 7 · חקירת $\cos x - \sqrt{2 \cos x}$ בתחום סגור ושטח בעזרת זוגיות

נתונה הפונקציה: $f(x) = \cos x - \sqrt{2 \cos x}$, בתחום: $-\pi \leq x \leq \pi$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$, והראו כי $f(x)$ זוגית.

ב. הראו כי $f'(x) = \sin x \left(\frac{1}{\sqrt{2 \cos x}} - 1 \right)$, ומצאו את שיעורי נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבעו את סוגן.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף $f(x)$ עם הצירים, ואת תחומי החיוביות והשליליות של $f(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. נתונה הפונקציה $g(x) = 1 - f(x)$, המוגדרת באותו התחום כמו $f(x)$.

ה. הראו כי $g(x) > f(x)$ בכל התחום, והביעו באמצעות S את השטח המוגבל על ידי הגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$ ועל ידי הישרים $x = -\frac{\pi}{2}$ ו- $x = \frac{\pi}{2}$.

שאלה 8 · מכפלת קטעים אנכיים ונקודת הפיתול: גרסה מודרכת

נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x}$, המוגדרת בתחום: $x \geq 0$, ונתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{24}{x^2+12}$, המוגדרת לכל x .
א(1). מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

א(2). הראו כי $g''(x) = \frac{144(x^2-4)}{(x^2+12)^3}$, ומצאו את שיעורי נקודות הפיתול של הפונקציה $g(x)$.

בנקודה $C(t, 0)$, $t > 0$, מעבירים אנך לציר ה- x . האנך חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A ואת הגרף של הפונקציה $g(x)$ בנקודה B.

ב. הביעו באמצעות t את מכפלת אורכי הקטעים AC ו-BC.

ג. מצאו את t שבעבורו מכפלת אורכי הקטעים AC ו-BC מקסימלית ואת הערך המקסימלי, והראו שבערך זה B היא נקודת פיתול של $g(x)$.

נתונה הפונקציה: $k(x) = \frac{24\sqrt{x+2}}{(x+2)^2+12}$, המוגדרת בתחום: $x \geq -2$.

ד. הסבירו מדוע $k(x)$ מתקבלת מהביטוי שמצאתם בסעיף ב על ידי ההצבה $t = x + 2$, ומצאו את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של $k(x)$ וקבעו את סוגה.

כל הברגיות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math