

מתכונת בגרות - שאלון 571

מבית GOOL בגריות ו-GuyAI

תלמידים ומורים יקרים,

לפניכם מתכונת שנבנתה בדיוק כמו בחינת הבגרות שמחכה לכם: אותו מבנה, אותם פרקים, אותה רמה ואותו ניקוד.

מתכונת בדרך לבגרות. אותו מבנה בדיוק כמו בבגרות, עם שאלות שבונות את הביטחון שלב אחרי שלב. היא מתאימה במיוחד לכיתה שרק התחילה את החזרה, לתלמידים שצריכים לחזק יסודות, ולכיתות שבהן הבגרות המלאה עדיין מרגישה רחוקה. הצלחה כאן היא לא "פשרה" - זו המדרגה שממנה עולים לרמת בגרות. ממליצים להתחיל כאן ולעבור למתכונת ברמת בגרות כשהציונים מתייצבים.

איך היא נולדה?

צוותי המורים של GOOL בגריות ו-GuyAI חיברו כוחות עם כלי הבינה המלאכותית המתקדמים ביותר שיש היום. ניתחנו כל בחינת בגרות בשאלון 571 מהשנים האחרונות: איזה פרק מופיע באיזו שאלה, איך בנויים הסעיפים ואיפה תלמידים נופלים. על הבסיס הזה בנינו מתכונת שנראית, מרגישה ונבחנת בדיוק כמו הבגרות האמיתית - אותו מבנה, אותם פרקים, אותה רמה ואותו ניקוד.

איך היא נבדקה?

כל שאלה עברה בדיקה עיוורת: פותר נוסף, שלא ראה את התשובות, פתר אותה מאפס. שאלה נכנסה למתכונת רק אם התשובה שלו זהה לשלנו, האיור תואם את הנתונים והרמה מתאימה - ובנוסף צוות המורים של GOOL בגריות עובר על המתכונות.

איך להפיק ממנה את המקסימום?

שבו לפתור בתנאי אמת - שעון מול העיניים, בלי ספר ובלי טלפון. פתרו לפי הוראות הבחירה שבראש השאלות, בדיוק כמו בבגרות: חמש שאלות מתוך שמונה. בחרו מראש על אילו שאלות תענו - גם הבחירה היא חלק מהאימון. בסוף בדקו את עצמכם מול דף התשובות הסופיות, ובכל סעיף שבו טעיתם פתחו את הפתרון המלא: שם מוסבר כל צעד, וגם הטעות הנפוצה שכדאי להיזהר ממנה.

טיפ למורים: כיתה הטרוגנית? אפשר לתת את אותו מבנה בשלוש רמות - "בדרך לבגרות" למי שמתחזק, "ברמת בגרות" לרוב הכיתה ו"מעל רמת בגרות" לחזקים. כולם מתאמנים על אותם פרקים, כל אחד ברמה שמקדמת אותו.

לעוד מתכונות, לכל בחינות הבגרות מהשנים הקודמות ולפתרונות מלאים: www.guyai.co.il
בהצלחה בבגרות!

צוותי GOOL בגריות ו-GuyAI

סוג הבחינה: בחינת מתכונת
מועד הבחינה: מתכונת 11, בדרך לבגרות
מספר השאלון: 035571
שם התלמיד/ה: _____

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות

א.

משך הבחינה: ארבע שעות ועשרים דקות.

ב.

מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון - שאלות קצרות

פרק שני - אינדוקצייה, סדרות והסתברות

פרק שלישי - גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

פרק רביעי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה - 22 נקודות).

סך הנקודות שתוכלו לצבור לא יעלה על 100.

ג.

חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

(2) דפי נוסחאות ל-5 יחידות לימוד.

ד.

הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.

(3) יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה - 22 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון - שאלות קצרות

בפרק זה שאלה 1. אפשר לבחור בה כאחת מחמש השאלות שעליכם לענות עליהן.

1. ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. ידוע כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + n(2n+1) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$$

של n האיברים הראשונים.

(1) האיבר $4 \cdot 9$ הוא האיבר הרביעי בסכום, והאיבר $10 \cdot 21$ הוא האיבר העשירי.

היעזרו ב- S_{10} וב- S_3 , וחשבו את הערך של הביטוי:

$$4 \cdot 9 + 5 \cdot 11 + \dots + 10 \cdot 21$$

ידוע כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + \dots + n(2n+1) + (n+1)(2n+3) = \frac{(n+1)(n+2)(4n+C)}{6}$$

(2) הסבירו מדוע אגף שמאל שווה ל- S_{n+1} , הציבו $n+1$ בנוסחה של S_n ומצאו את C .

ב. הנקודה A נמצאת על מעגל שמרכזו O ורדיוסו 9.

המשיק למעגל בנקודה A יוצר זווית של 35° עם

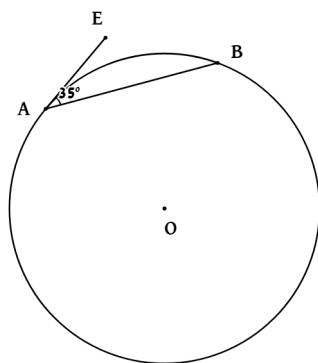
המיתר AB (ראו סרטוט).

(1) חשבו את הזוויות OAB ו- AOB . (היעזרו

בכך שהרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה.)

(2) חשבו את אורך הקשת הקטנה AB , ואת היחס

בין אורך הקשת הזאת להיקף המעגל.



ג. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{9x^2+4}}{2x}$, המוגדרת לכל $x \neq 0$.

(1) הראו כי עבור $x > 0$ מתקיים $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{9 + \frac{4}{x^2}}$, ועבור $x < 0$ מתקיים

$$f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{9 + \frac{4}{x^2}}.$$

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של $f(x)$ המאונכות לצירים.

נתונה הפונקציה $g(x) = 2f(x - 1)$.

(3) מצאו את משוואות האסימפטוטות של $g(x)$ המאונכות לצירים, ואת המרחק בין

האסימפטוטות האופקיות של $g(x)$.

ד. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 4x$ (ראו גרף),

ונתונה הפונקציה $g(t) = \int_{-2}^t f(x) dx$ המוגדרת

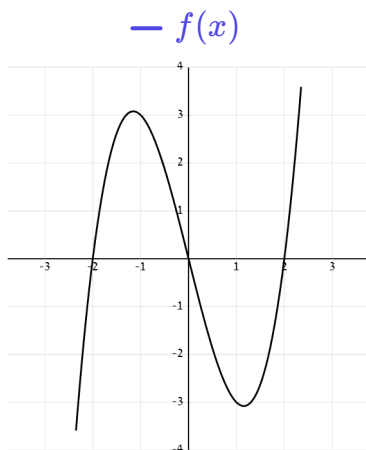
בתחום $-2 \leq t \leq 2$.

(1) הראו כי $g(t) = \frac{(t^2-4)^2}{4}$.

(2) מצאו את תחום הירידה של $g(t)$. האם יש ערכים

של t שעבורם $g(t)$ שלילית? נמקו.

(3) מצאו את נקודות הפיתול של $g(t)$.



פרק שני - אינדוקצייה, סדרות והסתברות

בפרק זה השאלות 2-3. בחרו מהן שאלות כרצונכם - בסך הכול חמש שאלות מכל השאלון.

2. נתונה סדרה a_n שסכום n האיברים הראשונים שלה, לכל n טבעי, הוא: $S_n = 2n^2 + 3n$.

א. חשבו את a_1 , a_2 ו- a_3 .

ב. הראו כי לכל n טבעי מתקיים $a_n = 4n + 1$.

ג. הוכיחו כי הסדרה a_n היא סדרה חשבונית, ומצאו את ההפרש שלה.

ד. נתונה סדרה הנדסית b_n שבה $b_1 = a_1$ והמנה שווה ל- $\frac{d}{2}$. נתונה סדרה הנדסית אינסופית c_n שבה $c_1 = a_1$ והמנה שווה ל- $\frac{1}{d}$ (d - ההפרש של a_n).

מצאו את m שבעבורו סכום m האיברים הראשונים של b_n הוא 1275.

ה. מצאו את סכום כל איברי הסדרה c_n , וקבעו אם c_n סדרה עולה או יורדת. נמקו.

3. במבחן קבלה לחוג רובוטיקה יש מאגר של 30 שאלות. כל מועמד מוציא באקראי מתוך קופסה שלושה פתקים בזה אחר זה, ללא החזרה, ובכל פתק כתובה שאלה אחרת מהמאגר. המועמד יתקבל לחוג אם יענה נכון על שתי שאלות לפחות מתוך השלוש.

יעל יודעת לענות נכון על 12 שאלות מתוך 30 השאלות שבמאגר, ועל השאר אינה יודעת לענות.

א. מהי ההסתברות שיעל תדע לענות על שאלה אחת לפחות מבין שתי השאלות שבשני הפתקים הראשונים?

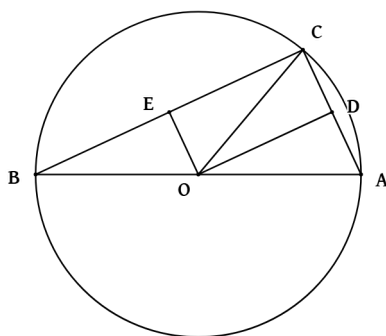
ב. (1) מהי ההסתברות שיעל תענה נכון על בדיוק שתיים מתוך שלוש השאלות?

(2) מהי ההסתברות שיעל תתקבל לחוג?

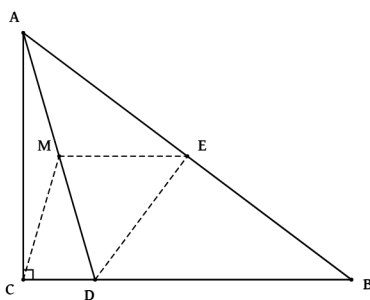
ג. ידוע כי יעל התקבלה לחוג. מהי ההסתברות שהיא לא ידעה לענות על השאלה שבפתק הראשון?

פרק שלישי - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

בפרק זה השאלות 4-5. בחרו מהן שאלות כרצונכם - בסך הכול חמש שאלות מכל השאלון.



4. משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O כך ש-AB הוא קוטר במעגל. הנקודה E היא אמצע הצלע BC, והנקודה D היא אמצע הצלע AC, כמתואר בסרטוט.
- הוכיחו: $OE \perp BC$ ו- $OD \perp AC$.
 - הוכיחו כי המרובע CEOD הוא מלבן.
 - הוכיחו כי הנקודות C, E, O, D נמצאות על מעגל אחד, וכי מרכזו הוא אמצע הקטע OC.
 - הישר ℓ משיק בנקודה C למעגל החוסם את המשולש ABC. הוכיחו כי הישר ℓ משיק גם למעגל שעליו נמצאות הנקודות C, E, O, D.



5. משולש ABC הוא ישר זווית: $\angle C = 90^\circ$. הנקודה E היא אמצע הצלע AB. הנקודה D נמצאת על הצלע BC כך ש- $AD = DB$. הנקודה M היא אמצע הקטע AD. נתון: $DB = 25$, $CD = 7$.
- הסבירו מדוע $CM = \frac{AD}{2}$, ומצאו את אורך CM.
 - הסבירו מדוע $ME \parallel DB$ ו- $ME = \frac{DB}{2}$, והסיקו כי $ME = CM$.
 - חשבו את AC ואת הזוויות $\angle ABC$ ו- $\angle ADC$.
 - הראו כי $DE \perp AB$, והסיקו כי המרובע ACDE בר חסימה במעגל.
 - חשבו את אורך הקטע DE.

פרק רביעי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

בפרק זה השאלות 6-8. בחרו מהן שאלות כרצונכם - בסך הכול חמש שאלות מכל השאלון.

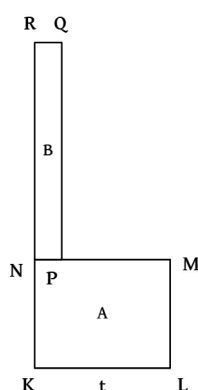
6. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4x}{(x^2-9)^2}$.

- א. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$ ואת משוואות האסימפטוטות שלה המאונכות לצירים.
- ב. הראו כי $f'(x) = \frac{-12(x^2+3)}{(x^2-9)^3}$, ומצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.
- ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ד. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$, וגרפה עובר בנקודה $(0, 0)$. מצאו את $g(x)$. (הדרכה: $4x = 2 \cdot 2x$, ו- $2x$ היא הנגזרת של $x^2 - 9$).
- ה. היעזרו בסעיף ב, ומצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של $g(x)$.

7. נתונות הפונקציות: $f(x) = 2 \sin^2 x$, $g(x) = 3 - \cos 2x$.

- א. הראו כי $f(x) = 1 - \cos 2x$.
- ב. הראו כי $g(x) = f(x) + c$, ומצאו את c .
- ג. חשבו את $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ ואת $\int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x) dx$.
- ד. חשבו את נפח גוף הסיבוב שנוצר מסיבוב סביב ציר ה- x של גרף הפונקציה $y = \sqrt{f(x)}$ בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

8. נתונות שתי גינות מלבניות הצמודות זו לזו, גינה A וגינה B.



הרוחב של גינה A הוא t מטרים. הרוחב של גינה B הוא 1 מטר ושטחה הוא $t + 3$ מ"ר. האורך הכולל של שתי הגינות הוא 12 מטרים, כמתואר בסרטוט.

- א. הראו כי שטח הגינה A הוא $S_A = 9t - t^2$, ומצאו את התחום האפשרי של t .
- ב. מצאו את t שבעבורו היחס בין שטח הגינה B ובין שטח הגינה A מינימלי, ואת היחס המינימלי.
- ג. מצאו את t שבעבורו היחס בין שטח הגינה A ובין שטח הגינה B מקסימלי, ואת היחס המקסימלי. נמקו.

עוד מתכונות, בגרורות ופתרונות מלאים: www.guyai.co.il