

מתכונת בגרות - שאלון 571

מבית GOOL בגריות ו-GuyAI

תלמידים ומורים יקרים,

לפניכם מתכונת שנבנתה בדיוק כמו בחינת הבגרות שמחכה לכם: אותו מבנה, אותם פרקים, אותה רמה ואותו ניקוד.

מתכונת בדרך לבגרות. אותו מבנה בדיוק כמו בבגרות, עם שאלות שבונות את הביטחון שלב אחרי שלב. היא מתאימה במיוחד לכיתה שרק התחילה את החזרה, לתלמידים שצריכים לחזק יסודות, ולכיתות שבהן הבגרות המלאה עדיין מרגישה רחוקה. הצלחה כאן היא לא "פשרה" - זו המדרגה שממנה עולים לרמת בגרות. ממליצים להתחיל כאן ולעבור למתכונת ברמת בגרות כשהציונים מתייצבים.

איך היא נולדה?

צוותי המורים של GOOL בגריות ו-GuyAI חיברו כוחות עם כלי הבינה המלאכותית המתקדמים ביותר שיש היום. ניתחנו כל בחינת בגרות בשאלון 571 מהשנים האחרונות: איזה פרק מופיע באיזו שאלה, איך בנויים הסעיפים ואיפה תלמידים נופלים. על הבסיס הזה בנינו מתכונת שנראית, מרגישה ונבחנת בדיוק כמו הבגרות האמיתית - אותו מבנה, אותם פרקים, אותה רמה ואותו ניקוד.

איך היא נבדקה?

כל שאלה עברה בדיקה עיוורת: פותר נוסף, שלא ראה את התשובות, פתר אותה מאפס. שאלה נכנסה למתכונת רק אם התשובה שלו זהה לשלנו, האיור תואם את הנתונים והרמה מתאימה - ובנוסף צוות המורים של GOOL בגריות עובר על המתכונות.

איך להפיק ממנה את המקסימום?

שבו לפתור בתנאי אמת - שעון מול העיניים, בלי ספר ובלי טלפון. פתרו לפי הוראות הבחירה שבראש השאלות, בדיוק כמו בבגרות: חמש שאלות מתוך שמונה. בחרו מראש על אילו שאלות תענו - גם הבחירה היא חלק מהאימון. בסוף בדקו את עצמכם מול דף התשובות הסופיות, ובכל סעיף שבו טעיתם פתחו את הפתרון המלא: שם מוסבר כל צעד, וגם הטעות הנפוצה שכדאי להיזהר ממנה.

טיפ למורים: כיתה הטרוגנית? אפשר לתת את אותו מבנה בשלוש רמות - "בדרך לבגרות" למי שמתחזק, "ברמת בגרות" לרוב הכיתה ו"מעל רמת בגרות" לחזקים. כולם מתאמנים על אותם פרקים, כל אחד ברמה שמקדמת אותו.

לעוד מתכונות, לכל בחינות הבגרות מהשנים הקודמות ולפתרונות מלאים: www.guyai.co.il
בהצלחה בבגרות!

צוותי GOOL בגריות ו-GuyAI

סוג הבחינה: בחינת מתכונת
מועד הבחינה: מתכונת 12, בדרך לבגרות
מספר השאלון: 035571
שם התלמיד/ה: _____

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות

א.

משך הבחינה: ארבע שעות ועשרים דקות.

ב.

מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון - שאלות קצרות

פרק שני - אינדוקצייה, סדרות והסתברות

פרק שלישי - גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

פרק רביעי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה - 22 נקודות).

סך הנקודות שתוכלו לצבור לא יעלה על 100.

ג.

חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

(2) דפי נוסחאות ל-5 יחידות לימוד.

ד.

הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.

(3) יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה - 22 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון - שאלות קצרות

בפרק זה שאלה 1. אפשר לבחור בה כאחת מחמש השאלות שעליכם לענות עליהן.

1. ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. נתון הסכום:

$$S_n = \frac{4 \cdot 1^2 - 2}{1 \cdot 3} + \frac{4 \cdot 2^2 - 2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{4n^2 - 2}{(2n-1)(2n+1)}$$

(1) הראו כי לכל k טבעי מתקיים:

$$2k^2(2k+3) + 4(k+1)^2 - 2 = 2(k+1)^2(2k+1)$$

(2) הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $S_n = \frac{2n^2}{2n+1}$.

ב. בתנועת נוער 80% מן החניכים משתתפים בטיולים, ו-45% מן החניכים משתתפים במחנה הקיץ.

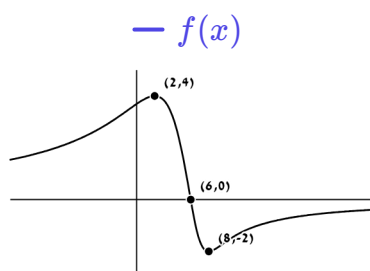
(1) הסבירו מדוע לפחות 25% מן החניכים משתתפים גם בטיולים וגם במחנה הקיץ.

(2) נתון כי 30% מן החניכים משתתפים גם בטיולים וגם במחנה הקיץ. חשבו את ההסתברות

שחניך שנבחר באקראי מבין המשתתפים בטיולים משתתף במחנה, ואת ההסתברות

שחניך שנבחר באקראי מבין המשתתפים במחנה משתתף בטיולים. איזו מהן גדולה יותר?

ג. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$,



המוגדרת לכל x . לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה

אחת בלבד, $y = 0$, ונקודת חיתוך אחת בלבד עם ציר

ה- x , $(6, 0)$. נקודות הקיצון של $f(x)$ הן $(2, 4)$

ו- $(8, -2)$, והן מסומנות בסרטוט.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{(f(x))^2}$.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של $g(x)$ ואת

האסימפטוטה האנכית שלה.

(2) הראו כי $g'(x) = \frac{-2f'(x)}{(f(x))^3}$, ומצאו את שיעורי נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבעו את

סוגן.

(3) מצאו כמה נקודות משותפות יש לגרף $g(x)$ ולישר $y = \frac{1}{8}$, וכמה נקודות משותפות

יש לו ולישר $y = 1$.

- ד. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{6x}{(x^2+1)^2}$, המוגדרת לכל x . היא פונקציה שהנגזרת שלה מקיימת $g'(x) = f(x)$, וגרף $g(x)$ עובר דרך הנקודה $(0, 1)$.
- (1) הראו כי הנגזרת של הפונקציה $h(x) = \frac{-3}{x^2+1}$ היא $f(x)$.
- (2) מצאו את $g(x)$.
- (3) מצאו את נקודת הקיצון של $g(x)$ וקבעו את סוגה, ומצאו את משוואת האסימפטוטה האופקית של $g(x)$.

פרק שני - אינדוקצייה, סדרות והסתברות

בפרק זה השאלות 2-3. בחרו מהן שאלות כרצונכם - בסך הכול חמש שאלות מכל השאלון.

2. a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה $q = 2$. נתון: $a_2 \cdot a_8 = 64$.

א. הראו כי $a_2 \cdot a_8 = a_5^2$, ומצאו את שתי האפשרויות ל- a_5 .

ב. נתון $a_5 > 0$. מצאו את a_1 .

ג. מצאו את n שעבורו $a_1 \cdot a_n = 64$.

ד. חשבו את המכפלה $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_9$.

3. במועדון גדול מאוד נערך סקר: 25% מהנשים חברות המועדון קוראות עיתון בוקר. מספר הגברים

במועדון גדול פי 2 ממספר הנשים שקוראות עיתון בוקר.

א. נסמן ב- W את מספר הנשים. הביעו באמצעות W את מספר הנשים הקוראות ואת מספר הגברים, והראו שההסתברות לבחור גבר היא $\frac{1}{3}$.

ב. ידוע שהמאורעות "נבחר גבר" ו- "נבחר/ה קורא/ת עיתון" בלתי תלויים. מהי ההסתברות

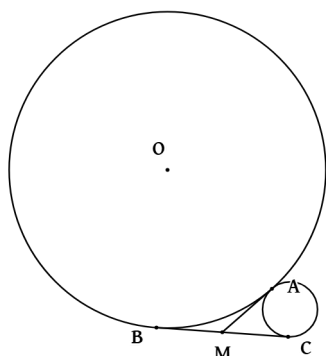
שחבר מועדון שנבחר באקראי קורא עיתון? מהי ההסתברות לבחור גבר שקורא עיתון?

ג. נבחר באקראי חבר/ת מועדון, וידוע שהוא/היא קורא/ת עיתון. מהי ההסתברות שזו אישה?

ד. בוחרים באקראי 4 חברי מועדון. מהי ההסתברות שבדיוק 2 מהם גברים שקוראים עיתון?

פרק שלישי - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

בפרק זה השאלות 4-5. בחרו מהן שאלות כרצונכם - בסך הכול חמש שאלות מכל השאלון.



4. שני מעגלים משיקים זה לזה מבחוץ בנקודה A (ראו סרטוט). הנקודה O היא מרכז המעגל השמאלי. מעבירים בנקודה A משיק משותף לשני המעגלים. B ו- C הן נקודות ההשקה של ישר נוסף שמשק לשני המעגלים. שני המשיקים נחתכים בנקודה M .

א. הוכיחו כי $MB = MA = MC$.

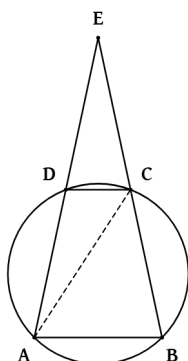
ב. הוכיחו כי $\angle BAC = 90^\circ$.

ג. נתון: $AC = 5$, $AB = 12$.

חשבו את BC ואת AM .

- ד. (1) הסבירו מדוע $OM \perp AB$, ונסמן ב- N את נקודת החיתוך של OM ו- AB . חשבו את MN .

(2) חשבו את רדיוס המעגל שמרכזו O .



5. נתון טרפז $ABCD$ ($AB \parallel DC$), החסום במעגל. המשכי הצלעות AD ו- BC נפגשים בנקודה E , כמתואר בסרטוט.

נתון: $\angle ACB = 45^\circ$.

נסמן: $\angle CDE = \alpha$, $AC = k$.

א. הסבירו מדוע $\angle ABC = \alpha$, ומדוע גם $\angle DAB = \alpha$.

ב. הראו כי $\angle DAC = 2\alpha - 135^\circ$, ומצאו את $\angle ADC$.

ג. הביעו באמצעות α ו- k את אורכי הצלעות AB ו- DC .

ד. נתון כי שטח המשולש ABE גדול פי 2 משטח המשולש DCE .

הסבירו מדוע $\frac{AB}{DC} = \sqrt{2}$, ומצאו את α .

ה. נתון $k = 8$. חשבו את רדיוס המעגל (בדיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה).

פרק רביעי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

בפרק זה השאלות 6-8. בחרו מהן שאלות כרצונכם - בסך הכול חמש שאלות מכל השאלון.

6. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{(x-3)^2(x+2)}{\sqrt{x+2}}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$. הראו כי בתחום זה $f(x) = (x-3)^2\sqrt{x+2}$, והסבירו מדוע לפונקציה אין אסימפטוטה אנכית.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ג. הראו כי $f'(x) = \frac{5(x-3)(x+1)}{2\sqrt{x+2}}$, ומצאו את שיעורי נקודות הקיצון של $f(x)$ ואת סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = -f(x+2)$.

מצאו את תחום ההגדרה של $g(x)$ ואת שיעורי נקודות הקיצון שלה, וקבעו את סוגן.

7. נתונה הפונקציה: $f(x) = \tan(x) + x$.

ענו על הסעיפים א-ב בעבור התחום: $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$ ואת משוואות האסימפטוטות שלה המאונכות לציר ה- x .

ב. נתון כי בתחום $0 < x < \frac{3\pi}{2}$ גרף $f(x)$ חותך את ציר ה- x בנקודה אחת בלבד, $x \approx 2.029$.

הראו כי $f(x)$ עולה בכל אחד מהקטעים של תחום ההגדרה, ומצאו את תחומי החיוביות והשליליות של $f(x)$.

ג. נתונה הפונקציה $g(x) = x \sin(x)$, המוגדרת לכל x .

האם $g(x)$ זוגית, אי-זוגית, או לא זוגית ולא אי-זוגית? הוכיחו.

ד. (1) הראו כי $g'(x) = \cos(x) \cdot f(x)$ לכל x בתחום ההגדרה של f , והסיקו שבתחום $0 < x < \frac{3\pi}{2}$ יש ל- $g(x)$ נקודת קיצון אחת בלבד. מצאו את שיעוריה וקבעו את סוגה.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

8. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$. מעבירים משיק לגרף $f(x)$ בנקודה שבה $x = t$, כאשר $\frac{1}{2} \leq t \leq 4$.

המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה A ואת ציר ה- y בנקודה B . O היא ראשית הצירים.

א. הראו שמשוואת המשיק היא $y = -\frac{1}{t^2}x + \frac{2}{t}$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודות A ו- B באמצעות t .

ג. מצאו את שיעור ה- x של נקודת ההשקה שעבורו סכום הניצבים $OA + OB$ מינימלי.

ד. מצאו את שיעור ה- x של נקודת ההשקה שעבורו סכום הניצבים מקסימלי.

עוד מתכונות, בגרורות ופתרונות מלאים: www.guyai.co.il