

מתכונת בגרות - שאלון 571

מבית GOOL בגריות ו-GuyAI

תלמידים ומורים יקרים,

לפניכם מתכונת שנבנתה בדיוק כמו בחינת הבגרות שמחכה לכם: אותו מבנה, אותם פרקים, אותה רמה ואותו ניקוד.

מתכונת בדרך לבגרות. אותו מבנה בדיוק כמו בבגרות, עם שאלות שבונות את הביטחון שלב אחרי שלב. היא מתאימה במיוחד לכיתה שרק התחילה את החזרה, לתלמידים שצריכים לחזק יסודות, ולכיתות שבהן הבגרות המלאה עדיין מרגישה רחוקה. הצלחה כאן היא לא "פשרה" - זו המדרגה שממנה עולים לרמת בגרות. ממליצים להתחיל כאן ולעבור למתכונת ברמת בגרות כשהציונים מתייצבים.

איך היא נולדה?

צוותי המורים של GOOL בגריות ו-GuyAI חיברו כוחות עם כלי הבינה המלאכותית המתקדמים ביותר שיש היום. ניתחנו כל בחינת בגרות בשאלון 571 מהשנים האחרונות: איזה פרק מופיע באיזו שאלה, איך בנויים הסעיפים ואיפה תלמידים נופלים. על הבסיס הזה בנינו מתכונת שנראית, מרגישה ונבחנת בדיוק כמו הבגרות האמיתית - אותו מבנה, אותם פרקים, אותה רמה ואותו ניקוד.

איך היא נבדקה?

כל שאלה עברה בדיקה עיוורת: פותר נוסף, שלא ראה את התשובות, פתר אותה מאפס. שאלה נכנסה למתכונת רק אם התשובה שלו זהה לשלנו, האיור תואם את הנתונים והרמה מתאימה - ובנוסף צוות המורים של GOOL בגריות עובר על המתכונות.

איך להפיק ממנה את המקסימום?

שבו לפתור בתנאי אמת - שעון מול העיניים, בלי ספר ובלי טלפון. פתרו לפי הוראות הבחירה שבראש השאלות, בדיוק כמו בבגרות: חמש שאלות מתוך שמונה. בחרו מראש על אילו שאלות תענו - גם הבחירה היא חלק מהאימון. בסוף בדקו את עצמכם מול דף התשובות הסופיות, ובכל סעיף שבו טעיתם פתחו את הפתרון המלא: שם מוסבר כל צעד, וגם הטעות הנפוצה שכדאי להיזהר ממנה.

טיפ למורים: כיתה הטרוגנית? אפשר לתת את אותו מבנה בשלוש רמות - "בדרך לבגרות" למי שמתחזק, "ברמת בגרות" לרוב הכיתה ו"מעל רמת בגרות" לחזקים. כולם מתאמנים על אותם פרקים, כל אחד ברמה שמקדמת אותו.

לעוד מתכונות, לכל בחינות הבגרות מהשנים הקודמות ולפתרונות מלאים: www.guyai.co.il
בהצלחה בבגרות!

צוותי GOOL בגריות ו-GuyAI

סוג הבחינה: בחינת מתכונת
מועד הבחינה: מתכונת 13, בדרך לבגרות
מספר השאלון: 035571
שם התלמיד/ה: _____

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות

א.

משך הבחינה: ארבע שעות ועשרים דקות.

ב.

מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון - שאלות קצרות

פרק שני - אינדוקצייה, סדרות והסתברות

פרק שלישי - גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

פרק רביעי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה - 22 נקודות).

סך הנקודות שתוכלו לצבור לא יעלה על 100.

ג.

חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

(2) דפי נוסחאות ל-5 יחידות לימוד.

ד.

הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.

(3) יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה - 22 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון - שאלות קצרות

בפרק זה שאלה 1. אפשר לבחור בה כאחת מחמש השאלות שעליכם לענות עליהן.

1. ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. נתונה הטענה: לכל n טבעי $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(1) בדקו שהטענה נכונה עבור $n = 1$ ועבור $n = 2$.

(2) הראו כי $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$, והסבירו מדוע מכך ומסעיף

א(1) נובע שהטענה נכונה לכל n טבעי.

(3) חשבו את הסכום $11^2 + 12^2 + \dots + 30^2$.

ב. ABCD טרפז שווה שוקיים ($AB \parallel CD$), שאלכסוניו נפגשים בנקודה O.

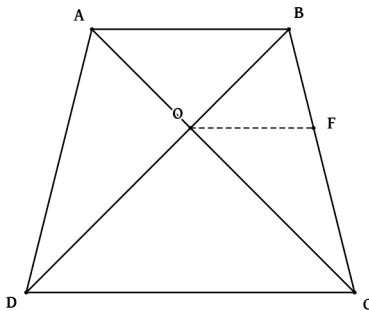
(1) הוכיחו כי $AO = BO$ וכי $CO = DO$.

נתון כי אלכסוני הטרפז מאונכים זה לזה, $AO = 6$, $CO = 10$.

(2) מצאו את אורך הבסיס AB.

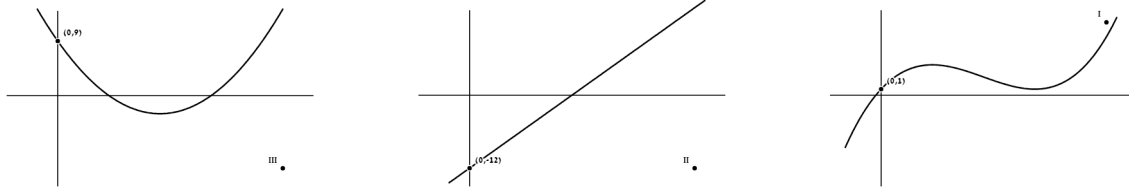
הנקודה F נמצאת על הצלע BC כך ש- $OF \parallel AB$.

(3) מצאו את אורך הקטע OF.



ג. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

לפניכם שלושה גרפים I-III: אחד מהם מתאר את $f(x)$, אחד את $f'(x)$ ואחד את $f''(x)$.
על כל גרף כתובים שיעורי נקודות החיתוך שלו עם ציר ה- y .



(1) מצאו את $f'(x)$ ואת $f''(x)$, וקבעו איזה גרף מתאר כל אחת מן הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$.

(2) מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבעו את סוגן, ומצאו כמה נקודות פיתול יש ל- $f(x)$.

(3) הראו כי השטח המוגבל על ידי גרף $f'(x)$, גרף $f''(x)$, ציר ה- y והישר $x = 1$ שווה ל- $\left[f(x) - f'(x) \right]_0^1$, וחשבו אותו.

ד. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

(1) מצאו את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של $f(x)$.

(2) הראו כי $F(x) = -\frac{1}{x^2+1}$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$.

(3) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף $f(x)$, ציר ה- x והישר $x = 2$.

פרק שני - אינדוקצייה, סדרות והסתברות

בפרק זה השאלות 2-3. בחרו מהן שאלות כרצונכם - בסך הכול חמש שאלות מכל השאלון.

2. הסדרה $a_1, a_2, a_3, \dots$ מוגדרת על ידי כלל הנסיגה:

$$\begin{cases} S_1 = 3 \\ S_{n+1} = S_n + 4n + 3 \end{cases}$$

כאשר $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

א. חשבו את a_1 , a_2 ו- a_3 .

ב. הסבירו מדוע $a_{n+1} = 4n + 3$ לכל n טבעי, והוכיחו שהסדרה a_n חשבונית.

ג. מגדירים סדרה נוספת b_n כך ש- $b_1 = 2$ ו- $b_{n+1} - b_n = a_n$ לכל n .
חשבו את b_2 , b_3 ו- b_4 .

ד. הראו כי לכל n מתקיים $\frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = \frac{a_n}{4}$, וחשבו את הסכום:

$$\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} + \frac{b_3 - b_2}{a_3 - a_2} + \dots + \frac{b_{11} - b_{10}}{a_{11} - a_{10}}$$

3. חדר כושר משרת מנויים שגרים בקריית אונו או באור יהודה בלבד. בשבוע מסוים בדקו אילו מן המנויים הגיעו לחדר הכושר לפחות פעם אחת.

30% מן המנויים גרים בקריית אונו. מבין המנויים שגרים בקריית אונו, 80% הגיעו לחדר הכושר באותו שבוע. מבין המנויים שהגיעו לחדר הכושר באותו שבוע, 40% גרים בקריית אונו. מספר המנויים גדול מאוד. בוחרים באקראי מנוי אחד.

א. הראו כי ההסתברות שהמנוי שנבחר גר בקריית אונו והגיע לחדר הכושר היא 0.24, ומצאו את ההסתברות שהמנוי שנבחר הגיע לחדר הכושר באותו שבוע.

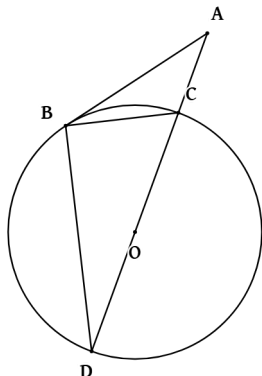
ב. השלימו טבלה דו-ממדית של ההסתברויות (מקום מגורים והגעה לחדר הכושר), ומצאו את ההסתברות שהמנוי שנבחר גר באור יהודה ולא הגיע לחדר הכושר.

ג. מבין המנויים שלא הגיעו לחדר הכושר באותו שבוע, בוחרים באקראי שני מנויים. מהי ההסתברות ששניהם גרים באור יהודה?

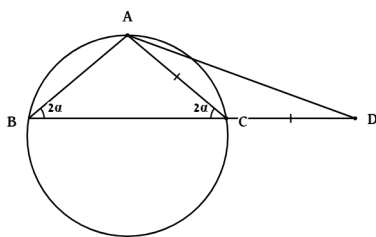
ד. חמישה מנויים שלא הגיעו לחדר הכושר באותו שבוע קיבלו הודעת תזכורת. מהי ההסתברות שבדיוק 4 מהם גרים באור יהודה?

פרק שלישי - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

בפרק זה השאלות 4-5. בחרו מהן שאלות כרצונכם - בסך הכול חמש שאלות מכל השאלון.



4. נתון מעגל שמרכזו O. מנקודה A שמחוץ למעגל יוצאים שני ישרים: הישר AB משיק למעגל בנקודה B, והישר AD עובר דרך מרכז המעגל O וחותך את המעגל בנקודות C ו-D (C בין A ל-O) (ראו סרטוט). נסמן: $\angle ADB = \alpha$.
- הסבירו מדוע $\angle ABC = \alpha$ ומדוע $\angle CBD = 90^\circ$.
 - הוכיחו כי $\triangle ABC \sim \triangle ADB$, והסיקו כי $AB^2 = AC \cdot AD$.
 - נתון: $AB = 4$, $AC = 2$. חשבו את AD ואת רדיוס המעגל.
 - חשבו את היחס בין שטח המשולש ABC לשטח המשולש ADB.
 - היעזרו בדמיון ומצאו את $\tan \alpha$ ואת α .



5. בציור שלפניכם מתואר משולש שווה-שוקיים ABC , שחוסם במעגל שרדיוסו R . זוויות הבסיס $\angle ABC = \angle ACB = 2\alpha$. על המשך הבסיס BC , מעבר לנקודה C , סימנו נקודה D כך ש- $CD = CA$, והעבירו את הקטע AD .
- הראו כי $\angle CAD = \angle ADC = \alpha$.
 - הוכיחו כי רדיוס המעגל החוסם את משולש ABD שווה לרדיוס המעגל החוסם את משולש ACD .
 - הביעו באמצעות R ו- α את אורך הצלע AC ואת שטח המשולש ACD .
 - נסמן ב- n את היחס בין שטח המשולש ACD לבין שטח המשולש ABD . הראו כי $n = \frac{1}{1+2\cos 2\alpha}$. (רמז: לשני המשולשים אותו גובה מהקודקוד A).
 - האם ייתכן כי $n = 0.3$? נמקו את תשובתכם.
 - נתון כי $n = 0.4$. מצאו את גודלי זוויות המשולש ABC .

פרק רביעי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

בפרק זה השאלות 6-8. בחרו מהן שאלות כרצונכם - בסך הכול חמש שאלות מכל השאלון.

6. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{(x^2-4)^2}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$ ואת משוואות האסימפטוטות שלה המאונכות לצירים.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

ג. הראו כי $f'(x) = \frac{-2(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$, ומצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

ד. קבעו לאן שואפת $f(x)$ כאשר $x \rightarrow 2^-$, כאשר $x \rightarrow 2^+$, כאשר $x \rightarrow -2^-$ וכאשר $x \rightarrow -2^+$. וסרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, ציר ה- x והישרים $x = 1$, $x = -1$. (הדרכה: הנגזרת של $x^2 - 4$ היא $2x$).

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$.

ענו על כל הסעיפים עבור התחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$ ואת האסימפטוטות האנכיות שלה.

ב. הראו כי $f'(x) = \frac{\sin x}{2 \cos x \sqrt{\cos x}}$, ומצאו את תחומי העלייה והירידה ואת נקודת הקיצון של $f(x)$.

ג. סרטטו סקיצה של גרף $f(x)$, והסבירו מדוע f זוגית.

ד. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$. הראו כי $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, ומצאו את תחום ההגדרה של g בתחום הנתון ואת נקודת הקיצון שלה.

ה. היעזרו בזוגיות של f ונמקו מדוע $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f'(x) dx = 0$.

8. נתונה הפונקציה $f(x) = (4 - x)\sqrt{x}$.

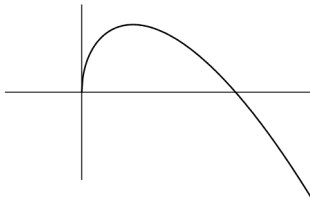
א. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$ ואת נקודות החיתוך של הגרף עם ציר ה- x .

ב. הראו כי $f'(x) = \frac{4-3x}{2\sqrt{x}}$ (עבור $x > 0$).

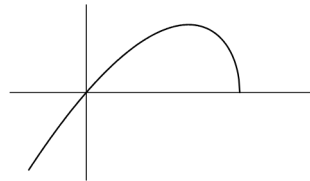
ג. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבעו את סוגן. בדקו גם את קצה התחום.

ד. אחד מן הגרפים I ו-II הוא הגרף של $f(x)$. קבעו איזה, ונמקו.

גרף II



גרף I



ה. השטח המוגבל בין הגרף של $f(x)$ לבין ציר ה- x (בין $x = 0$ ל- $x = 4$) מסתובב סביב ציר ה- x . חשבו את נפח גוף הסיבוב.

עוד מתכונות, בגרורות ופתרונות מלאים: www.guyai.co.il