

שאלה 1 · שאלות קצרות מודרכות: אינדוקציה, קטע אמצעים בטרפז, f, f', f'' ו- $\frac{1}{f}$

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

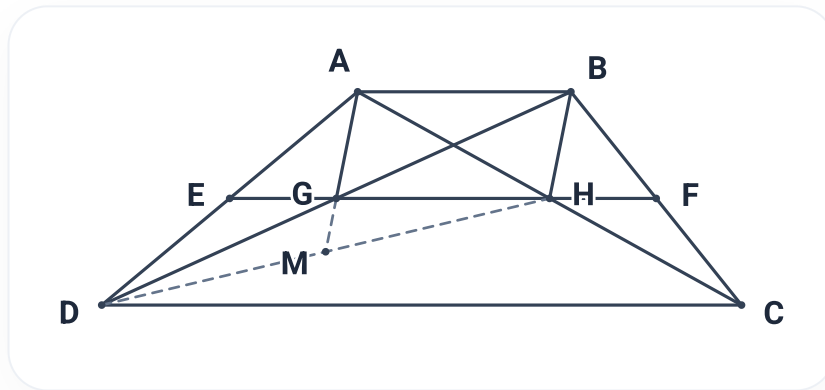
נתונות הסדרות $a_n = n$ ו- $b_n = 2^n$ (טבעי). נסמן: $T_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$.

א(1). הראו כי $T_{k+1} = T_k + (k+1) \cdot 2^{k+1}$, והוכיחו: אם בעבור k טבעי כלשהו $T_k = (k-1) \cdot 2^{k+1}$, אז $T_{k+1} = k \cdot 2^{k+2}$.

א(2). חשבו את T_1 ואת T_2 , ובדקו אם הם מקיימים את הנוסחה $T_n = (n-1) \cdot 2^{n+1}$. האם הנוסחה נכונה לכל n טבעי? נמקו.

א(3). מצאו מספר c כך שהנוסחה $T_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + c$ תהיה נכונה לכל n טבעי, והסבירו מדוע היא נכונה.

בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel CD$) נתון: $AB = 5$, $DC = 15$. הקטע EF הוא קטע אמצעים (E על AD , F על BC), והוא חותך את האלכסונים AC ו- BD בנקודות H ו- G בהתאמה.



ב(1). חשבו את האורכים EF , EG , HF ו- GH .

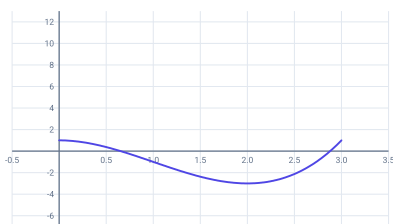
ב(2). הוכיחו כי המרובע $ABHG$ הוא מקבילית.

המשך הישר AG חותך את הקטע DH בנקודה M .

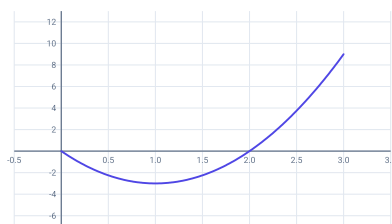
ב(3). היעזרו במשולש DBH , והוכיחו כי M היא אמצע הקטע DH .

נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ בתחום $0 \leq x \leq 3$. לפניכם הגרפים I, II, III, המייצגים את $f(x)$, את $f'(x)$ ואת $f''(x)$, לא בהכרח בסדר זה.

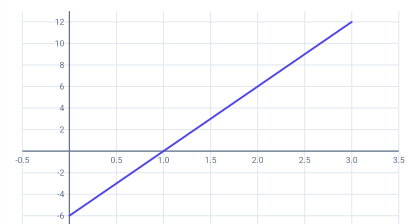
— III



— II



— I



ג(1). מצאו את $f'(x)$ ואת $f''(x)$, והתאימו כל אחד מהגרפים I-III לפונקציה שהוא מייצג. נמקו.

ג(2). מצאו את נקודת הפיתול של $f(x)$ ואת משוואת המשיק לגרף $f(x)$ בנקודה זו.

ג(3). חשבו את $\int_0^1 f''(x) dx$ בשתי דרכים: בעזרת הפונקציה הקדומה $f'(x)$, ובעזרת השטח שבין גרף f'' לציר ה- x .

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{3x^2+1}{2x^2-2}$.

ד(1). מצאו את תחום ההגדרה ואת האסימפטוטות של $f(x)$, ואת נקודת החיתוך של גרף $f(x)$ עם ציר ה- y .

ד(2). הראו כי בנקודות החיתוך של הגרפים של $f(x)$ ו- $\frac{1}{f(x)}$ מתקיים $f(x) = 1$ או $f(x) = -1$, ומצאו את נקודות החיתוך.

ד(3). מצאו את האסימפטוטה האופקית של $\frac{1}{f(x)}$ ואת המרחק בינה לבין האסימפטוטה האופקית של $f(x)$.

שאלה 2 · סדרה הנדסית שלילית, סדרת ההפכיים וסכום האיברים במקומות האי-זוגיים

נתונה סדרה הנדסית אין-סופית A שאיבריה $a_1, a_2, a_3, \dots$. כל איברי הסדרה A שליליים.

נתון: $a_5 = 81a_1$, $a_1 = -\frac{1}{2}$.

א(1). מצאו את מנת הסדרה A .

א(2). האם הסדרה A עולה, יורדת או לא עולה ולא יורדת? נמקו.

נתונה סדרה B שאיבריה מקיימים $b_n = \frac{1}{a_n}$ לכל n טבעי.

ב. הוכיחו כי B היא סדרה הנדסית, ומצאו את האיבר הראשון שלה ואת המנה שלה.

ג. הראו כי סכום הסדרה B מתכנס, ומצאו אותו.

בסדרה B מחקו את כל האיברים שבמקומות הזוגיים ($b_2, b_4, b_6, \dots$).

ד. מצאו את סכום האיברים הנותרים.

שאלה 3 · הסתברות: משאל עם - ברנולי, הסתברות מותנית ותנאי עצירה

במדינה גדולה נערך משאל עם. כל מצביע הצביע "בעד" או "נגד".

נסמן ב- p את ההסתברות שמצביע שנבחר באקראי הצביע "בעד".

בוחרים באקראי 3 מצביעים. נתון כי ההסתברות ששלושתם הצביעו "נגד" היא $\frac{1}{64}$.

א. מצאו את p .

בוחרים באקראי 3 מצביעים.

ב. מהי ההסתברות שבדיוק אחד מהם הצביע "בעד"?

בוחרים באקראי 4 מצביעים.

ג. הסבירו מדוע ההסתברות שארבעתם הצביעו באותו אופן היא $\left(\frac{3}{4}\right)^4 + \left(\frac{1}{4}\right)^4$.

ידוע כי ארבעתם הצביעו באותו אופן. מצאו את ההסתברות שארבעתם הצביעו "בעד".

חלק מן המצביעים מבוגרים והשאר צעירים. 15% מן המבוגרים הצביעו "נגד", ו-55% מן הצעירים הצביעו "בעד".

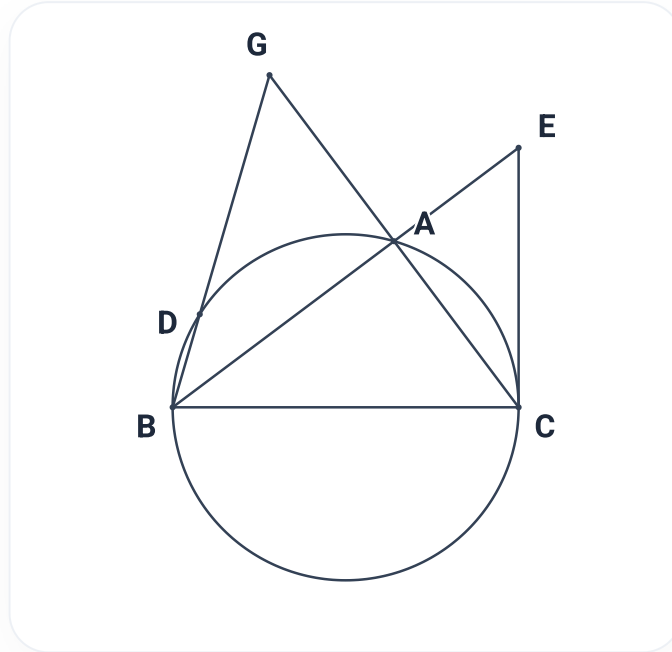
ד. נסמן ב- y את ההסתברות לבחור באקראי מצביע צעיר. הראו כי $0.85(1 - y) + 0.55y = \frac{3}{4}$, ומצאו את y .

סוקר מתקשר באקראי לצעירים בלבד, בזה אחר זה, ומפסיק מייד אחרי שדיבר עם צעיר אחד שהצביע "בעד" וצעיר אחד שהצביע "נגד".

ה. הסבירו מדוע הסוקר מתקשר ל-3 צעירים בדיוק אם ורק אם שני הראשונים הצביעו באותו אופן והשלישי הצביע אחרת, ומצאו את ההסתברות שהסוקר מתקשר ל-3 צעירים בדיוק.

שאלה 4 · משולש חסום במעגל שצלעו קוטר: מחוצה זווית ודמיון לאורכים ושטחים מספריים

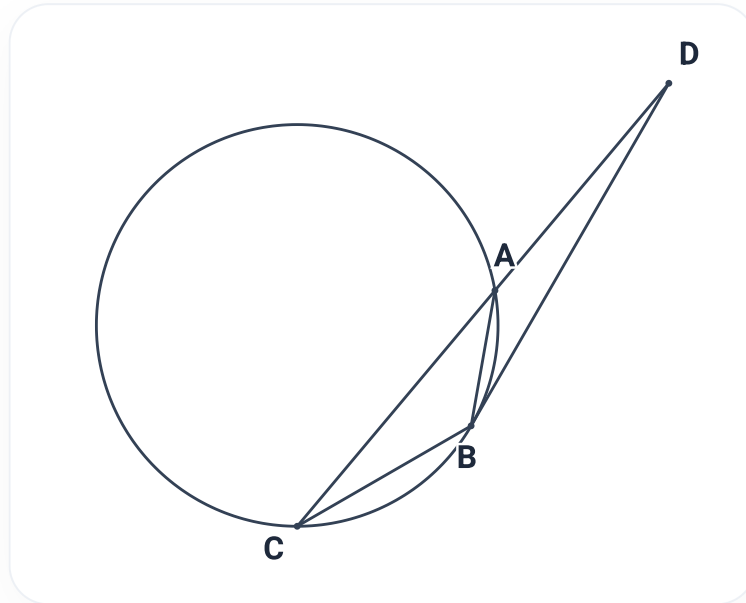
משולש ABC חסום במעגל שרדיוסו 5. הצלע BC היא קוטר במעגל, ו- $AC = 6$. הנקודה G נמצאת על המשך הצלע CA כך ש- $GA = AC$. הקטע GB חותך את המעגל בנקודה D .



- א. היעזרו בזווית BAC , והוכיחו כי $BG = BC$ וכי הישר AB חוצה את $\angle GBC$.
- ב. הוכיחו כי $\angle GDA = \angle GCB$, והסיקו כי $\triangle GBC \sim \triangle GAD$.
- ג. חשבו את אורך הקטע GD ואת היחס $\frac{S_{DBCA}}{S_{GAD}}$.
- ד. דרך הנקודה C העבירו משיק למעגל שחותך את המשך הקטע BA בנקודה E . חשבו את אורך AB , את אורך AE , ופי כמה גדול שטח המשולש CBE משטח המשולש ABC .

שאלה 5 · משיק וחותר במעגל: דמיון משולשים ומשפט הסינוסים המורחב (מודרך)

המשולש ABC חסום במעגל שהרדיוס שלו הוא R . המשיק למעגל בנקודה B חותך את המשך הצלע CA בנקודה D , כמתואר בסרטוט. נסמן: $\angle ABD = \alpha$. נתון: $\angle DBC = 150^\circ$.



א. הסבירו מדוע $\angle ACB = \alpha$, והראו כי $\angle BAC = 30^\circ$.

ב. הביעו את אורכי הצלעות AB ו- BC באמצעות R ו- α , אם יש צורך.

ג. הוכיחו כי $\triangle DBA \sim \triangle DCB$.

נתון: $DC = 4DA$.

ד. מצאו את α .

נתון: $R = 10$.

ה. מצאו את אורך הקטע BD .

שאלה 6 · פונקציה רציונלית: חקירה, סקיצה וקעירות של הפונקציה הקדומה

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4x}{(x^2-9)^2}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$ ואת משוואות האסימפטוטות שלה המאונכות לצירים.

ב. הראו כי $f'(x) = \frac{-12(x^2+3)}{(x^2-9)^3}$, ומצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$, וגרפה עובר בנקודה $(0, 0)$. מצאו את $g(x)$. (הדרכה: $4x = 2 \cdot 2x$, ו- $2x$ היא הנגזרת של $x^2 - 9$).

ה. היעזרו בסעיף ב, ומצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של $g(x)$.

שאלה 7 · חקירת $x + \sin 2x$ בתחום סגור והפונקציה $\sqrt{-f'(x)}$ (מודרך)

נתונה הפונקציה: $f(x) = x + \sin(2x)$, המוגדרת בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

א. הוכיחו כי הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

ב. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \sqrt{-f'(x)}$.

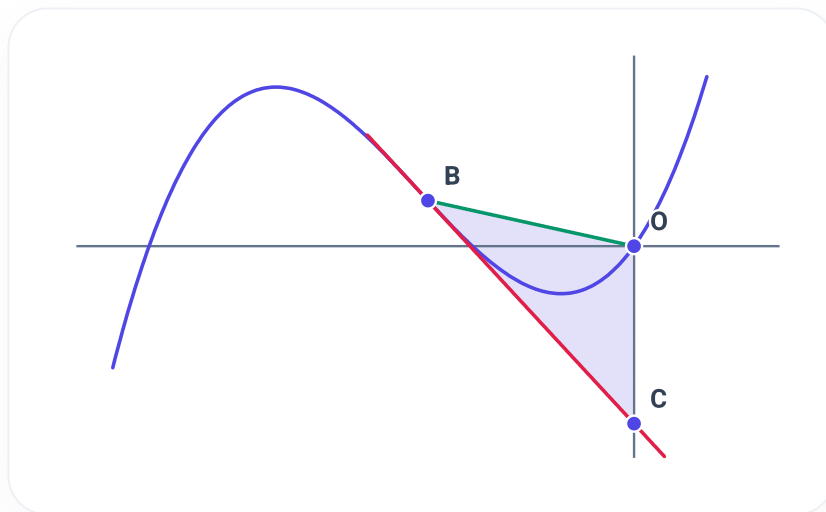
ד(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ד(2). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף $g(x)$ עם ציר ה- x , ואת ערכי g בקצוות $x = \pm \frac{\pi}{2}$.

ה. הראו כי לפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול בקטע $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$, וסרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

שאלה 8 · משיק לפולינום בנקודה כללית: שטח משולש בשלבים

נתונה הפונקציה $f(x) = 3x^3 + 16x^2 + 16x$. הנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה ברביע השני, ו- t הוא שיעור ה- x שלה. המשיק לגרף בנקודה B חותך את ציר ה- y בנקודה C, ו-0 היא ראשית הצירים (ראו סרטוט).



א. הראו כי משוואת המשיק לגרף בנקודה B היא $y = (9t^2 + 32t + 16)x - 6t^3 - 16t^2$.

ב. מצאו את תחום הערכים של t שבעבורם B נמצאת ברביע השני.

נתון גם כי הנקודה C נמצאת מתחת לציר ה- x .

ג. מצאו את תחום הערכים של t .

ד. הראו כי שטח המשולש OBC הוא $S(t) = -3t^4 - 8t^3$, ומצאו את השטח המקסימלי.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math