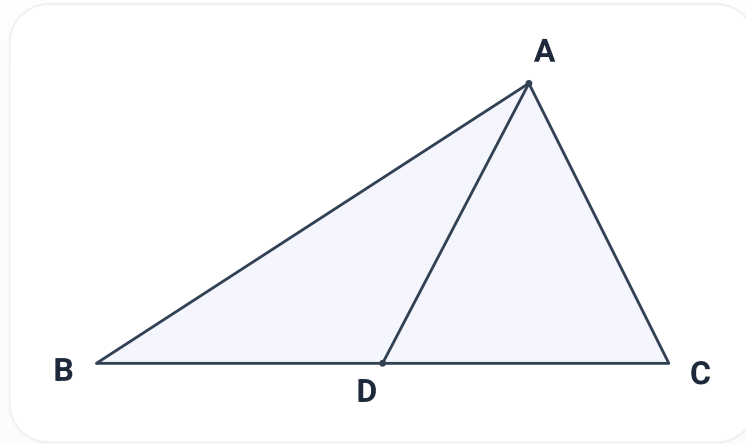


שאלה 1 · שאלות קצרות מודרכות: יחס רדיוסים, ביטויי ברנולי, קיצון של f' ושטח מתחת ל- f'' , סדרת זוויות

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

בסרטוט שלפניכם משולש ABC . הנקודה D נמצאת על הצלע BC .

נתון: $AC = 6$, $AB = 10$.



א(1). הסבירו מדוע $\sin \angle ADB = \sin \angle ADC$.

א(2). מצאו את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את משולש ABD ובין רדיוס המעגל החוסם את משולש ACD .

ב. ההסתברות שזרע שנשתל ינבט היא 0.9, בלי תלות בזרעים האחרים. שותלים 3 זרעים. לפניכם שני ביטויים:

ביטוי 1: $1 - 0.1^3$

ביטוי 2: $3 \cdot 0.9^2 \cdot 0.1 + 0.9^3$

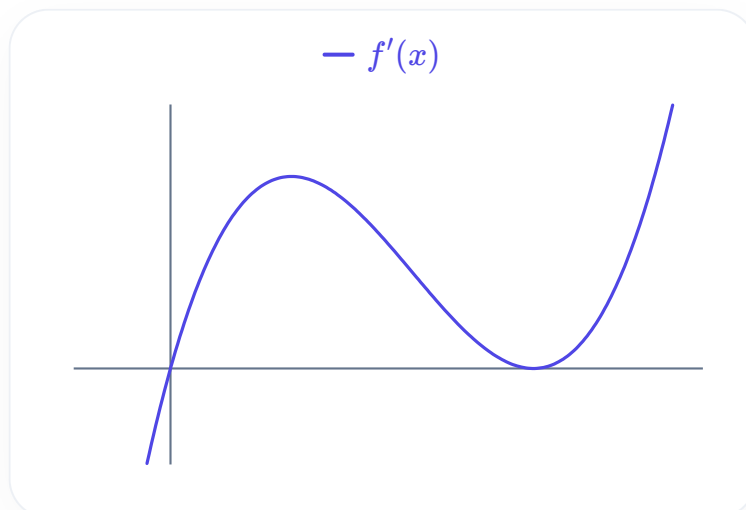
קבעו איזו מן ההסתברויות I-II מחושבת על ידי ביטוי 1 ואיזו על ידי ביטוי 2, וחשבו את ההסתברות שנותרה.

I. ההסתברות שלפחות זרע אחד ינבט.

II. ההסתברות שלפחות שני זרעים ינבטו.

III. ההסתברות שבדיוק שני זרעים ינבטו.

בסרטוט שלפניכם הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x) = x(x - 3)^2$ של פונקציה $f(x)$.

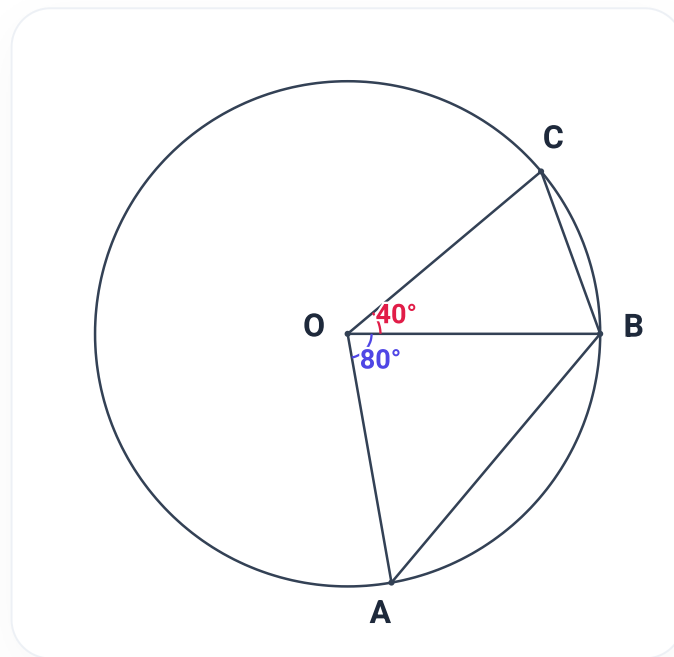


ג(1). מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של $f'(x)$, והסבירו מדוע בנקודות אלה הגרף של $f''(x)$ חותך את ציר ה- x .

ג(2). חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף $f''(x)$, ציר ה- x וציר ה- y ברביע הראשון, ואת השטח המוגבל על ידי גרף $f''(x)$ וציר ה- x ברביע הרביעי.

במעגל שמרכזו O ורדיוסו 2 בונים סדרה אין-סופית של משולשים שווי שוקיים, ששוקיהם רדיוסים וזוויות הראש שלהם זוויות מרכזיות.

זווית הראש של המשולש הראשון ($\triangle AOB$) היא 80° , וזווית הראש של כל משולש נוסף קטנה פי 2 מזווית הראש של המשולש שלפניו.



ד(1). הראו שזוויות הראש של המשולשים הן סדרה הנדסית אין-סופית מתכנסת, וחשבו את הסכום של כל זוויות הראש.

ד(2). חשבו את השטחים של שלושת המשולשים הראשונים (בדיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית), וקבעו אם שטחי המשולשים הם סדרה הנדסית.

שאלה 2 · סדרת מנות של שתי סדרות הנדסיות: התכנסות, סכום ושוויון סכומים

נתונות שתי סדרות הנדסיות אינסופיות. בסדרה A האיבר הראשון הוא $a_1 = 4$ והמנה היא $q_A = -\frac{1}{2}$. בסדרה B האיבר הראשון הוא $b_1 = 2$ והמנה היא q , כאשר $0 < q < 1$. בונים סדרה חדשה שאיבריה הם:

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots$$

א. הראו שהסדרה החדשה היא סדרה הנדסית, ומצאו את האיבר הראשון שלה ואת מנתה (הביעו באמצעות q).

ב. קבעו לגבי כל אחת מהסדרות A ו-B אם היא עולה, יורדת או אף אחד מהם. נמקו.

ג. מצאו עבור אילו ערכים של q הסדרה החדשה מתכנסת.

ד. נתון כי סכום הסדרה החדשה הוא $\frac{6}{5}$. מצאו את q .

ה. הראו כי אין ערך של q שבעבורו סכום הסדרה החדשה שווה למנה של סכום הסדרה A בסכום הסדרה B.

שאלה 3 · שתי קופסאות: שני כדורים בלי החזרה, ניסויים עד לכדור אדום והוספת כדורים

בקופסה א' יש 3 כדורים אדומים ו-2 כדורים צהובים, ובקופסה ב' יש 4 כדורים אדומים. רון מטיל מטבע הוגן כדי לבחור קופסה, ומוציא ממנה באקראי שני כדורים בזה אחר זה, ללא החזרה.

א. מצאו את ההסתברות ששני הכדורים צהובים.

ב. מצאו את ההסתברות ששני הכדורים באותו הצבע.

ג. ידוע ששני הכדורים באותו הצבע. מה ההסתברות ששניהם צהובים?

רון מחזיר את הכדורים לקופסה. עכשיו בכל פעם הוא מטיל את המטבע, מוציא כדור אחד מהקופסה שנבחרה ומחזיר אותו. הוא חוזר על התהליך עד שהוא מוציא כדור אדום, ואז מפסיק.

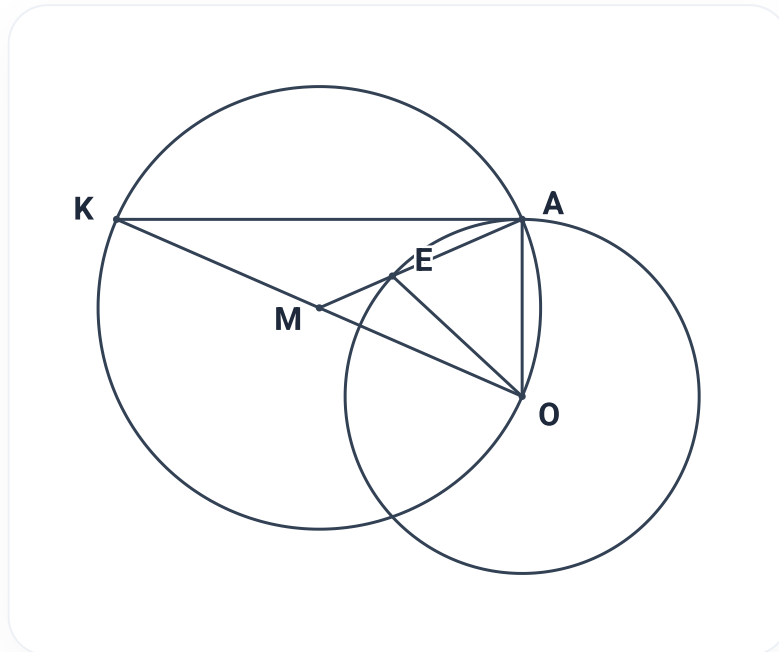
ד. מצאו את ההסתברות שרון ביצע תהליך זה 3 פעמים בדיוק.

הוסיפו לקופסה א' כמה כדורים צהובים. אחר כך הטילו את המטבע והוציאו כדור אחד מהקופסה שנבחרה. נתון כי עכשיו ההסתברות שהכדור אדום היא $\frac{3}{5}$.

ה. כמה כדורים צהובים הוסיפו לקופסה א'?

שאלה 4 · שני מעגלים נחתכים: משיק, קוטר ודמיון - במספרים ובהדרכה

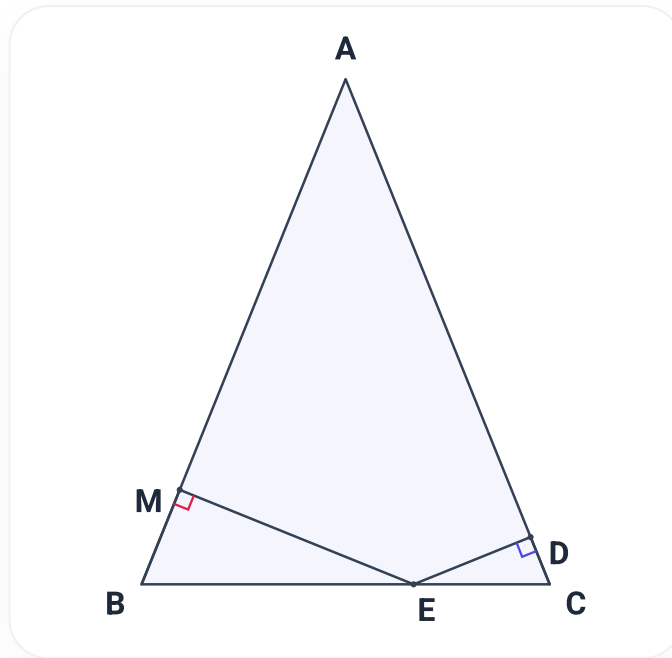
בסרטוט שלפניכם מעגל גדול שמרכזו M ורדיוסו 5, ומעגל קטן שמרכזו O ורדיוסו 4. הנקודה O נמצאת על המעגל הגדול, והנקודה A היא אחת מנקודות החיתוך של שני המעגלים. המשיק למעגל הקטן בנקודה A חותך את המעגל הגדול בנקודה K. הקטע AM חותך את המעגל הקטן בנקודה E.



- א. הסבירו מדוע $\angle KAO = 90^\circ$, והוכיחו כי KO הוא קוטר של המעגל הגדול.
- ב. הוכיחו כי $\angle AOE = 2\angle KAE$. (היעזרו במשולש שווה השוקיים AOE).
- ג. הסבירו מדוע המשולשים MOA ו-OEA שווים שוקיים, והוכיחו כי $\triangle MOA \sim \triangle OEA$.
- ד. מצאו את אורך הקטע AE ואת אורך הקטע ME.
- ה. מצאו את היחס בין שטח המשולש MEO לשטח המשולש OKA.

שאלה 5 · משולש שווה-שוקיים ואנכים מנקודה על הבסיס (מודרך)

בסרטוט שלפניכם משולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$). הנקודה E נמצאת על הבסיס BC כך ש-
 $BE = 2 \cdot EC$. ED מאונך לצלע AC ו- EM מאונך לצלע AB (M על AB , D על AC).
 נסמן: $\angle ABC = \alpha$, $EC = k$, $45^\circ < \alpha < 90^\circ$.



א. הביעו באמצעות k ו- α את אורכי הקטעים ME , BM , DE ו- DC .

ב. הראו כי סכום שטחי המשולשים BEM ו- CED הוא $\frac{5}{4}k^2 \sin 2\alpha$.

ג. נתון כי סכום שטחי המשולשים BEM ו- CED הוא $1.1k^2$.

ד. מצאו את הערך של α .

ה. נתון: $k = 3$.

ו. הסבירו מדוע AE הוא קוטר במעגל החוסם את המשולש AED , ומצאו את רדיוס המעגל. היעזרו בגובה AH לבסיס BC .

שאלה 6 · פונקציה רציונלית: נגזרת נתונה, מונוטוניות לפי סימן המכנה, סקיצה ושטח

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x}{(x^2-4)^2}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$ ואת משוואות האסימפטוטות שלה המאונכות לצירים.

ב. הראו כי $f'(x) = -\frac{3x^2+4}{(x^2-4)^3}$.

ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$. האם יש לפונקציה נקודות קיצון?

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = k \cdot f(x)$, פרמטר שלילי.

השטח המוגבל על ידי גרף $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x = 1$ הוא 1. מצאו את k .

שאלה 7 · פונקציה טריגונומטרית אי-זוגית: זווית כפולה, קיצון של $f(2x)$ ואינטגרל של נגזרות

נתונה הפונקציה: $f(x) = 2 \sin(x) \cos(x)$, המוגדרת לכל x .

א. הראו כי הפונקציה $f(x)$ אי-זוגית.

ב. הראו כי $f(x) = \sin(2x)$, והסיקו כי לכל x : $-1 \leq f(x) \leq 1$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

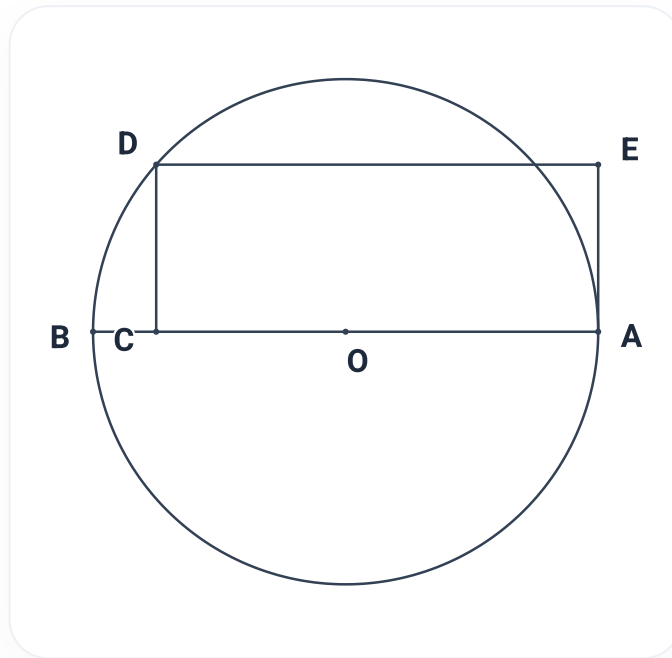
ה. נתונה הפונקציה $g(x) = f(2x)$.

ה. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של $g(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, וקבעו את סוגן.

ו. נתון כי $\int_0^{\frac{\pi}{12}} (g'(x) + f'(x)) dx = S$. הביעו באמצעות S את $\int_{-\frac{\pi}{12}}^0 (g'(x) + f'(x)) dx$. הסבירו.

שאלה 8 · מלבן בין קוטר, משיק ומעגל: בעיית קיצון מודרכת

הקטע AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O ורדיוסו 4. על הקוטר מסמנים נקודה C ועל המעגל נקודה D , כך ש- $CD \perp AB$ ו- $AC > 4$. דרך D מעבירים ישר המקביל ל- AB , ודרך A מעבירים משיק למעגל; הם נחתכים בנקודה E (ראו סרטוט). נסמן: $AC = x$.



א. הראו כי $CD = \sqrt{x(8-x)}$.

ב. הביעו באמצעות x את שטח המלבן $ACDE$, ורשמו את התחום שבו x יכול להשתנות.

ג. מצאו את x שבעבורו שטח המלבן מקסימלי, ואת השטח המקסימלי.

הנקודה F נמצאת על הצלע DE .

ד. הראו כי סכום השטחים של המשולשים CDF ו- AFE שווה למחצית שטח המלבן, ומצאו את הסכום המקסימלי.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math