

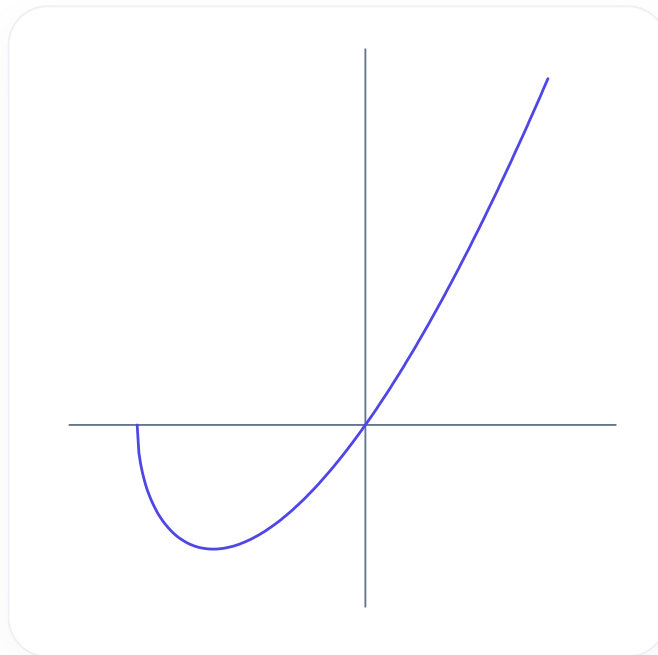
שאלה 1 · שאלות קצרות מודרכות: סכום $n(n+1)$ באינדוקציה, בחירת סימן של פונקציית שורש ושטח של **f^2 , $\frac{1}{f-4}$ מגרף, משולש ישר זווית שצלעותיו בסדרה הנדסית**

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א(1). הראו כי לכל k טבעי מתקיים: $\frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$.

א(2). הוכיחו באינדוקציה מתמטית כי לכל n טבעי מתקיים:
 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $x \geq -2$.



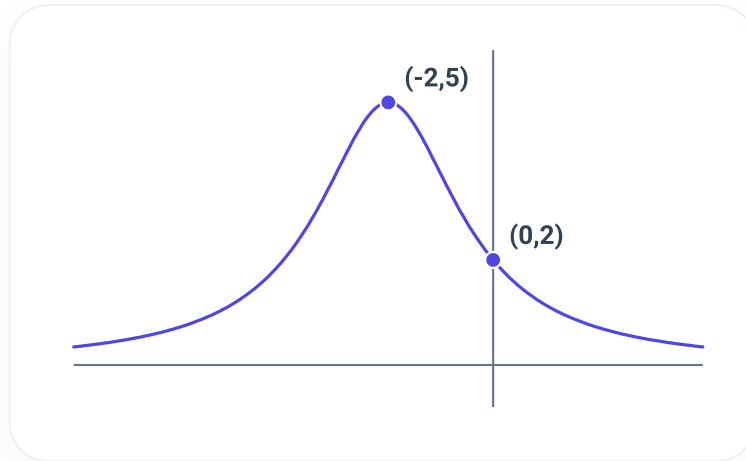
נתון כי $f(x) = x\sqrt{x+2}$ או $f(x) = -x\sqrt{x+2}$.

ב(1). קבעו איזה מן הביטויים מייצג את $f(x)$. נמקו את קביעתכם.

נתונה הפונקציה $g(x) = (f(x))^2$ המוגדרת בתחום $x \geq -2$.

ב(2). הראו כי $g(x) = x^3 + 2x^2$, וחשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x . לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד, $(-2, 5)$, ואסימפטוטה אופקית אחת בלבד, $y = 0$. גרף הפונקציה חותך את ציר ה- y בנקודה $(0, 2)$.



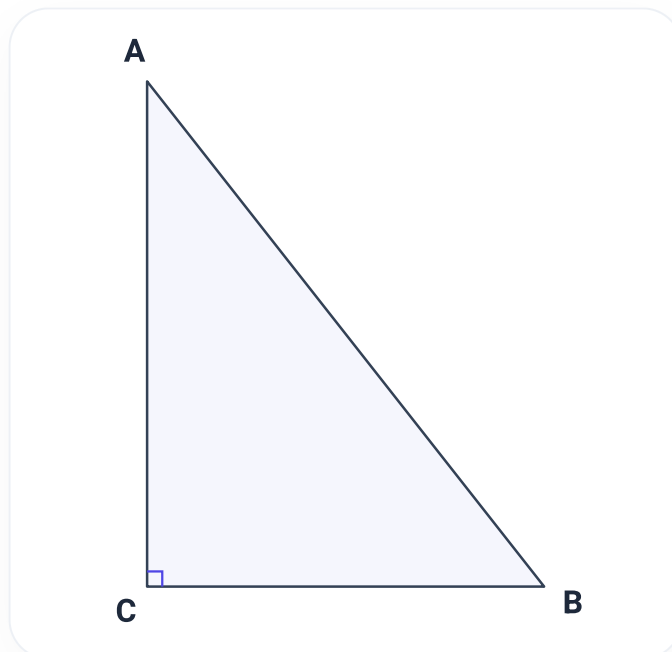
נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)-4}$.

ג(1). הסבירו מדוע לפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטה אנכית בכל נקודה שבה $f(x) = 4$, וקבעו לפי הסרטוט כמה אסימפטוטות אנכיות יש לפונקציה $g(x)$.

ג(2). מצאו את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $g(x)$.

ג(3). חשבו את $g(-2)$, וקבעו אם הנקודה $(-2, g(-2))$ היא נקודת מינימום או נקודת מקסימום של $g(x)$.

בסרטוט שלפניכם משולש ישר זווית ABC ($\angle ACB = 90^\circ$).



אורכי צלעות המשולש הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית עולה שמנתה q . האיבר הראשון בסדרה הוא אורך הצלע הקצרה BC , ונתון $BC = 2$.

ד(1). הסבירו מדוע הצלע AB היא האיבר השלישי בסדרה, והביעו את AC ואת AB באמצעות המנה q .

ד(2). הראו כי $q^4 - q^2 - 1 = 0$, ומצאו את אורך הצלע AB .

שאלה 2 · סדרת הממוצעים של סדרה חשבונית: הוכחה מודרכת וסכומים

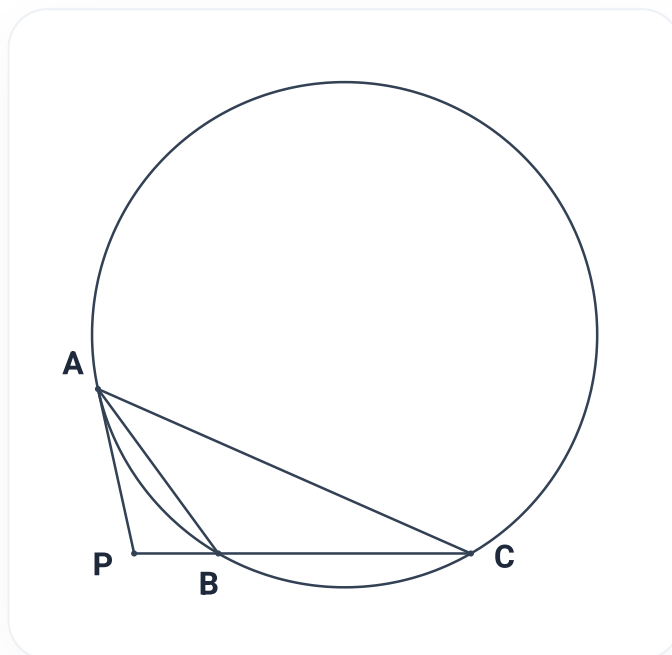
- נתונה סדרה חשבונית A ובה 30 איברים. d הוא הפרש הסדרה ($d \neq 0$).
 מגדירים סדרה נוספת B באופן הזה: $b_t = \frac{a_t + a_{t+1}}{2}$. בסדרה B יש 29 איברים.
- א. הביעו את b_t ואת b_{t+1} באמצעות a_1 , d ו- t , והוכיחו שהסדרה B חשבונית. מהו הפרש שלה?
- ב. הראו כי $b_1 + b_{29} = a_1 + a_{30}$.
- נתון: סכום האיברים בסדרה A הוא 1230.
- ג. מצאו את סכום האיברים בסדרה B.
- ד. מצאו את סכום שני האיברים האמצעיים בסדרה A.

שאלה 3 · הסתברות: עוגיות שנאכלות ועוגיות שמוחזרות - עץ מודרך

- בצנצנת יש שתי עוגיות שוקולד ושלוש עוגיות וניל. מאיה מוציאה באקראי עוגייה מן הצנצנת. אם העוגייה היא וניל – היא מחזירה אותה לצנצנת, ואם היא שוקולד – היא אוכלת אותה מייד.
 מאיה מוציאה מן הצנצנת שתי עוגיות בזו אחר זו באופן המתואר.
- א(1). סרטטו עץ הסתברויות לשתי ההוצאות, וחשבו את ההסתברות שמאיה תאכל בדיוק עוגייה אחת.
- א(2). ידוע שמאיה אכלה בדיוק עוגייה אחת. מה ההסתברות שהיא אכלה את העוגייה הראשונה שהוציאה?
- ב. מאיה מוציאה ארבע עוגיות בזו אחר זו באופן המתואר. הסבירו מדוע כל עוד מאיה מוציאה עוגיות וניל, ההסתברות להוציא וניל נשארת $\frac{3}{5}$, וחשבו את ההסתברות שמאיה תאכל עוגייה אחת לפחות.
- ג. מאיה מוציאה שלוש עוגיות בזו אחר זו באופן המתואר. חשבו את ההסתברות שמאיה תאכל את שתי עוגיות השוקולד.

שאלה 4 · משיק וחותר מנקודה אחת: דמיון, אורך המשיק וחס שטחים

מנקודה P שמחוץ למעגל יוצאים משיק למעגל בנקודה A , וחותר שחותך את המעגל בנקודות B ו- C (B בין P ל- C), כמו בסרטוט.



א. הוכיחו כי $\triangle PAB \sim \triangle PCA$.

נתון: $BC = 6$, $PB = 2$.

ב. מצאו את אורך המשיק PA .

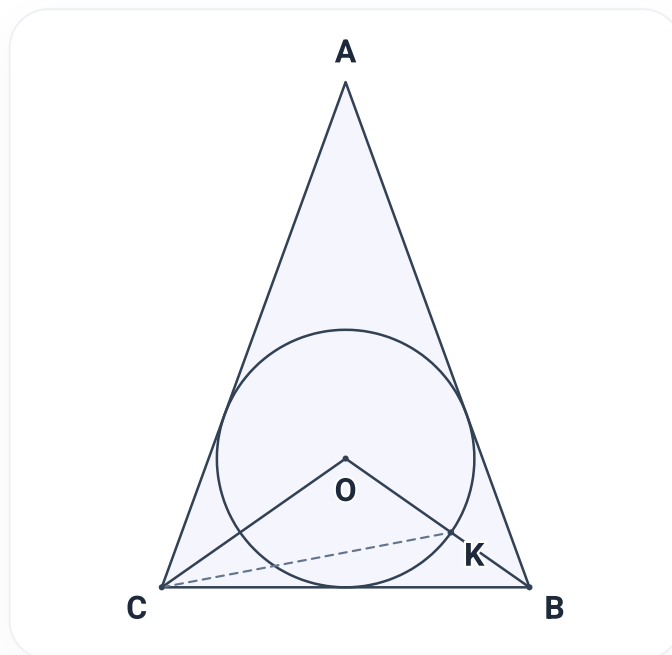
ג. מצאו את היחס בין שטח המשולש PAB לשטח המשולש PCA .

נתון: שטח המשולש ABC הוא 18.

ד. מצאו את שטח המשולש PAB .

שאלה 5 · משולש שווה שוקיים ומעגל חסום: חישובים בזווית נתונה

במשולש שווה שוקיים ABC ($AC = AB$) חסום מעגל שמרכזו O ורדיוסו 2. נתון: $\angle ACB = 70^\circ$.
המעגל חותך את הקטע BO בנקודה K (ראו סרטוט).



א. חשבו את אורך הקטע CO .

ב. חשבו את אורך השוק AC .

ג. מצאו את גודל הזווית COB , וחשבו את אורך הקטע CK .

הנקודה E נמצאת על הצלע CB , ושטח המשולש CKE הוא 2.

ד. חשבו את אורך הקטע BE .

שאלה 6 · פונקציה רציונלית אי-זוגית, הגרף של $|f(x)| - 3$ ופונקציית הצטברות

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2-4}{x}$, המוגדרת עבור $x \neq 0$.

א. מצאו את האסימפטוטה האנכית של $f(x)$, הראו ש- $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית, ומצאו את נקודות החיתוך של גרף $f(x)$ עם הצירים.

ב. הראו כי $f'(x) = 1 + \frac{4}{x^2}$, והסיקו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

ג. סרטטו סקיצה של גרף $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = |f(x)| - 3$, המוגדרת עבור $x \neq 0$.

ד(1). מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבעו את סוגן.

ד(2). מצאו את נקודות החיתוך של גרף $g(x)$ עם ציר ה- x .

נתונה הפונקציה $s(x) = \int_1^x g(t) dt$, המוגדרת בתחום $x > 1$.

ה. היעזרו בסעיף ד ומצאו את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של $s(x)$ ואת סוגה.

שאלה 7 · מנה טריגונומטרית: זוגיות, נגזרת מודרכת, קיצון בתחום סגור ואינטגרל $f^2 f'$

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sin x}{2+\cos x}$, המוגדרת בתחום: $-\pi \leq x \leq \pi$.

א. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית? נמקו את תשובתכם.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

ג. הראו כי $f'(x) = \frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$.

ד. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום, וקבעו את סוגן.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = (f(x))^2 \cdot f'(x)$, המוגדרת בתחום: $0 \leq x \leq \pi$.

ו. היעזרו בכך ש- $\left(\frac{f^3(x)}{3}\right)' = f^2(x) \cdot f'(x)$, וחשבו את השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

שאלה 8 · חוט באורך 12 ס"מ שנחתך למשולש שווה-צלעות ולמשושה משוכלל

חוט שאורכו 12 ס"מ חותכים לשני חלקים. מחלק אחד יוצרים משולש שווה-צלעות, ומן החלק האחר יוצרים משושה משוכלל. נסמן ב- x את אורך צלע המשולש (בס"מ).

א. מצאו את תחום ההגדרה של x .

ב. הראו כי סכום השטחים של שתי הצורות הוא $S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(2 - \frac{x}{2}\right)^2$ (משושה משוכלל מורכב משישה משולשים שווים-צלעות).

ג. מצאו את x שבעבורו סכום השטחים מינימלי, ואת סכום השטחים המינימלי.

ד. הראו כי כאשר סכום השטחים מינימלי, רדיוס המעגל החסום במשולש שווה לרדיוס המעגל החסום במשושה.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math