

שאלה 1 · שאלות קצרות מודרכות: אינדוקציה, f'' , ערך מוחלט ודמיון במעגל

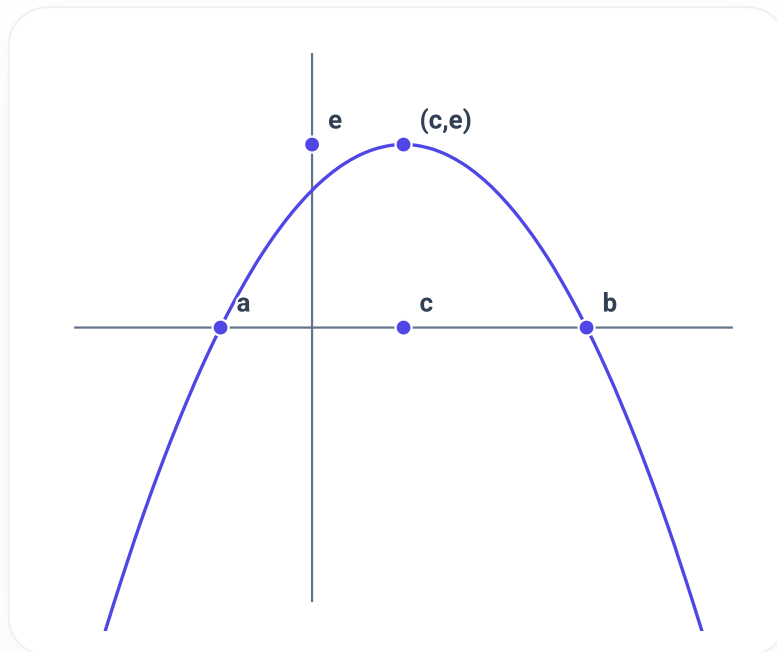
ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

נתון השוויון: $2 + 6 + 12 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

א(1). בדקו שהשוויון מתקיים בעבור $n = 1$ ובעבור $n = 2$, וכתבו את האיבר שמתווסף לאגף השמאלי במעבר מ- $n = k$ ל- $n = k + 1$.

א(2). הוכיחו באינדוקציה מתמטית שהשוויון מתקיים בעבור כל n טבעי.

בסרטוט שלפניכם מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ של פונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x . הגרף חותך את ציר ה- x בנקודות $(a, 0)$ ו- $(b, 0)$, והנקודה (c, e) היא נקודת המקסימום שלו.



ב(1). הביעו באמצעות a , b את תחומי העלייה והירידה של $f'(x)$.

ב(2). מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של $f'(x)$, וקבעו את סוגן.

נתונה פונקציה $h(x)$ המקיימת $h'(x) = f''(x) - e$.

ב(3). הראו שלפונקציה $h(x)$ אין נקודות קיצון, ומצאו את שיעור ה- x של נקודת הפיתול שלה.

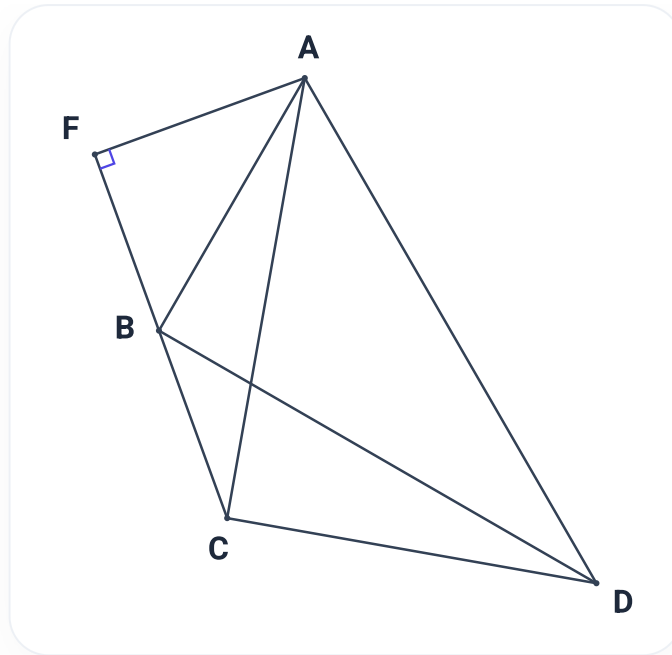
נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - 4$, ונתונות הפונקציות $g(x) = |f(x) + 1|$ ו- $h(x) = |f(x)| + 1$.

ג(1). מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$, וקבעו את סוגן.

ג(2). מצאו את נקודות הקיצון של $h(x)$, וקבעו את סוגן.

ג(3). כמה נקודות חיתוך יש לישר $y = 4$ עם גרף $g(x)$, וכמה עם גרף $h(x)$? נמקו.

המרובע ABCD חסום במעגל, ו-AD הוא קוטר במעגל שאורכו 10. הנקודה F נמצאת על המשך הצלע CB, כך ש- $FB \perp FA$, כמתואר בסרטוט שלפניכם.



ד(1). הסבירו מדוע $\angle ACD = 90^\circ$, ומדוע $\angle ABF = \angle ADC$.

ד(2). הוכיחו: $\triangle ACD \sim \triangle AFB$, וכתבו את התאמת הקודקודים.

נתון: $\angle BDA = 30^\circ$.

ד(3). חשבו את האורך AB, ואת היחס בין שטח המשולש ACD ובין שטח המשולש AFB.

שאלה 2 · סדרה חשבונית בלי האיבר הראשון: סכום מתחלף של ריבועים ותת-סדרה

נתונה סדרה חשבונית עולה A: $a_1, a_2, a_3, \dots$ שהפרשה d . מגדירים סדרה B: $b_1, b_2, b_3, \dots$ כך ש-
 $b_n = a_{n+1}$ לכל n טבעי (כלומר B היא הסדרה A בלי האיבר הראשון). מסמנים ב- T_n את סכום n האיברים הראשונים של B.

א. הראו כי B היא סדרה חשבונית שהפרשה d , וכי $b_1 = a_1 + d$.

ב. הראו כי לכל k טבעי מתקיים: $b_k^2 - b_{k+1}^2 = -d(b_k + b_{k+1})$.

נתון: $d = 2$ ו-

$$b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \dots + b_{19}^2 - b_{20}^2 = -160$$

ג. חשבו את b_1 .

ד. מחברים בזה אחר זה את איברי הסדרה A הנמצאים במקומות האי-זוגיים $(a_1 + a_3 + a_5 + \dots)$. מהו המספר המינימלי של איברים שיש לחבר כדי שהסכום יהיה חיובי?

שאלה 3 · עץ דו-שלבי תלוי: שני מבחנים, הסתברות מותנית וברנולי

כדי לקבל תעודה תלמיד ניגש לשני מבחנים.

ההסתברות שתלמיד יעבור את המבחן הראשון היא 0.7.

אם עבר את המבחן הראשון, ההסתברות שיעבור את המבחן השני היא 0.8. אם נכשל במבחן הראשון, ההסתברות שיעבור את המבחן השני היא p .

נתון: ההסתברות שתלמיד יעבור בדיוק מבחן אחד מבין השניים היא 0.2.

א. סרטטו עץ הסתברויות, ומצאו את p .

ב. מהי ההסתברות שתלמיד יעבור את שני המבחנים? מהי ההסתברות שייכשל בשניהם?

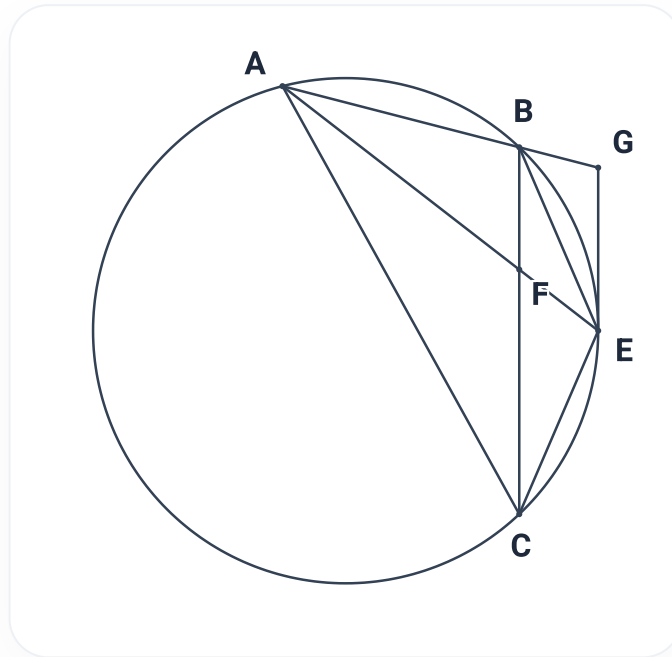
תלמיד מקבל תעודה אם עבר את שני המבחנים.

ג. ידוע שתלמיד עבר לפחות מבחן אחד. מהי ההסתברות שהוא קיבל תעודה?

ד. שלושה תלמידים ניגשו לשני המבחנים. מהי ההסתברות שבדיוק שניים מהם קיבלו תעודה?

שאלה 4 · מעגל: אמצע קשת ומשיק - דמיון ותאלס בהדרכה

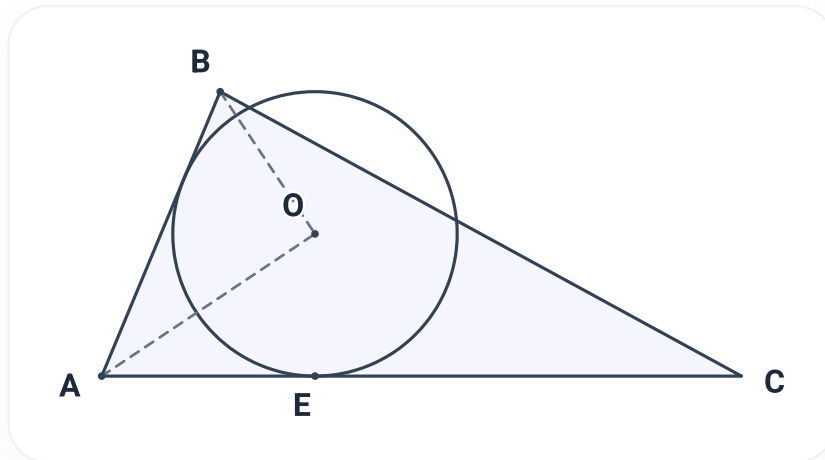
הנקודות A, B ו-C נמצאות על מעגל. נקודה E היא אמצע הקשת BC, כמתואר בסרטוט שלפניכם. בנקודה E מעבירים משיק למעגל. המשיק חותך את המשך המיתר AB בנקודה G. המיתרים AE ו-BC נחתכים בנקודה F.



- א. הסבירו מדוע $\angle BAE = \angle EAC$.
- ב. הוכיחו כי $\angle AEG = \angle ACE$, והסיקו כי $\triangle ACE \sim \triangle AEG$.
- נתון: $AG = 8$, $AE = 4\sqrt{6}$.
ג. חשבו את אורך המיתר AC.
- ד. הוכיחו: $BC \parallel GE$. (רמז: הראו כי $\angle GEB = \angle BAE$ וכי $\angle EBC = \angle EAC$).
- נתון: $AB = 6$.
ה. חשבו את אורך הקטע AF.
- ו. מהו היחס בין שטח המשולש ABF ובין שטח המשולש AFC? נמקו.

שאלה 5 · משיקים למעגל מנקודה: צלע בעזרת $\sin 2\beta$, שטח וצלע שלישית - בהדרכה

נתון מעגל שמרכזו O ורדיוסו R. מן הנקודה A העבירו שני ישרים AB ו-AC המשיקים למעגל. הנקודה E היא נקודת ההשקה של הישר AC למעגל, והנקודה C נמצאת על המשך AE כך ש- $CE = 2AE$ (ראו סרטוט). נתון: $BO \perp AO$. נסמן ב- 2β את הזווית BAC.



א. הראו כי $AO = \frac{R}{\sin \beta}$, והראו כי $AB = \frac{2R}{\sin 2\beta}$.

נתון כי $AB = \frac{13}{6}R$, והזווית BAC היא זווית חדה.

ב. מצאו את $\sin 2\beta$ ואת $\cos 2\beta$, ומצאו את β .

ג. הראו כי $\tan \beta = \frac{2}{3}$, והביעו באמצעות R את AE, את AC ואת שטח המשולש ABC.

נתון: $R = 6$.

ד. מצאו את אורך הצלע BC.

שאלה 6 · פונקציית שורש: אסימפטוטות שונות ב- $\pm\infty$, אי-זוגיות ושטח

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$ ואת משוואות האסימפטוטות של $f(x)$ המקבילות לציר ה- x . (היעזרו בכך ש- $\sqrt{x^2} = |x|$).

ב. הוכיחו כי $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

ג. הראו כי $f'(x) = \frac{10}{(x^2+5)^{\frac{3}{2}}}$, וקבעו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{(f(x))^2}$, המוגדרת לכל $x \neq 0$.

ה. הראו כי $g(x) = \frac{1}{4} + \frac{5}{4x^2}$, וחשבו את השטח המוגבל על ידי גרף $g(x)$, ציר ה- x והישרים $x = 1$ ו- $x = 5$.

שאלה 7 · הפונקציות $\tan x + x$ ו- $x \sin x$: חיוביות, זוגיות וקיצון באפס של פונקציה אחרת

נתונה הפונקציה: $f(x) = \tan(x) + x$.

ענו על הסעיפים א-ב בעבור התחום: $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$ ואת משוואות האסימפטוטות שלה המאונכות לציר ה- x .

נתון כי בתחום $0 < x < \frac{3\pi}{2}$ גרף $f(x)$ חותך את ציר ה- x בנקודה אחת בלבד, $x \approx 2.029$.

ב. הראו כי $f(x)$ עולה בכל אחד מהקטעים של תחום ההגדרה, ומצאו את תחומי החיוביות והשליליות של $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = x \sin(x)$, המוגדרת לכל x .

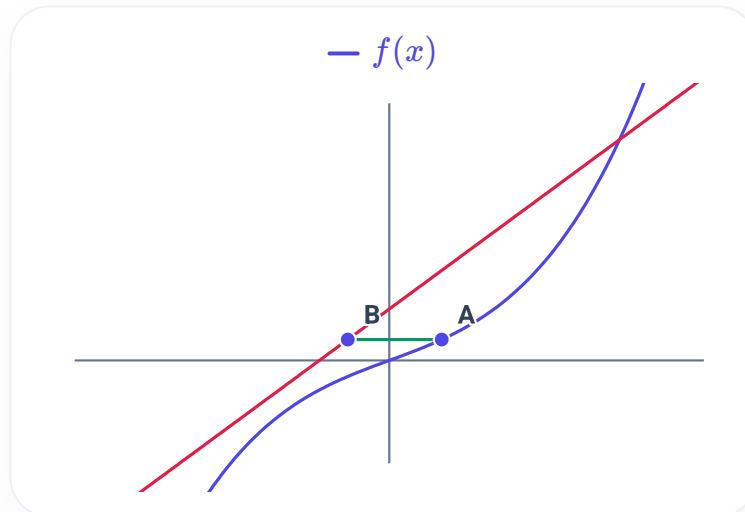
ג. האם $g(x)$ זוגית, אי-זוגית, או לא זוגית ולא אי-זוגית? הוכיחו.

ד(1). הראו כי $g'(x) = \cos(x) \cdot f(x)$ לכל x בתחום ההגדרה של f , והסיקו שבתחום $0 < x < \frac{3\pi}{2}$ יש ל- $g(x)$ נקודת קיצון אחת בלבד. מצאו את שיעוריה וקבעו את סוגה.

ד(2). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

שאלה 8 · קטע אופקי בין גרף $3x^3 + 3x$ לישר $y = 6x + 4$ (מודרך)

בסרטוט שלפניכם מתוארים גרף הפונקציה $f(x) = x^3 + 3x$ והישר $y = 6x + 4$. הנקודה A נמצאת על גרף $f(x)$, משמאל לנקודת החיתוך של הגרף עם הישר. הנקודה B נמצאת על הישר כך שהקטע AB מקביל לציר ה- x . נסמן ב- t את שיעור ה- x של A . נתון: $-2.5 \leq t \leq 1.5$.



א. הביעו באמצעות t את שיעור ה- x של הנקודה B .

ב. הראו כי $AB = \frac{4+3t-t^3}{6}$.

ג. מצאו את נקודות הקיצון המקומיות של AB כפונקציה של t , וקבעו את סוגן.

ד(1). מצאו את הערך של t שבעבורו אורך הקטע AB מינימלי.

ד(2). מצאו את הערך של t שבעבורו אורך הקטע AB מקסימלי.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math