

שאלה 1 · שאלות קצרות מתקדמות: כל ערכי k , פיתול לפי פרמטר, אפסים וקיצון של הצטברות, המשולש של**נקודות ההשקה**

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א(1). הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי הביטוי $5^n - 1$ מתחלק ב-4 ללא שארית.

א(2). מצאו את כל המספרים השלמים p שבעבורם הביטוי $5^{n+1} + p$ מתחלק ב-20 ללא שארית לכל n טבעי.

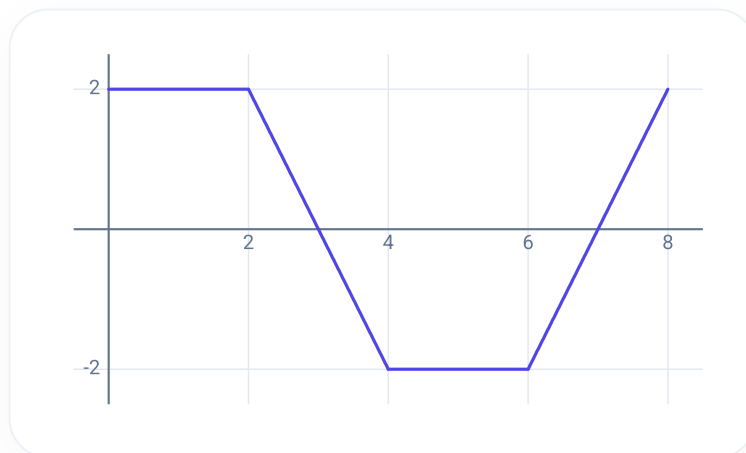
נתונה הפונקציה $f(x) = \left(x + \frac{k}{x}\right)^3$, כאשר $k \neq 0$ הוא פרמטר.

ב(1). מצאו את $f'(x)$, וקבעו לאילו ערכי k יש לפונקציה $f(x)$ נקודות קיצון. נמקו.

נתון: $f''(x) = \frac{6(x^2+k)(x^4-kx^2+2k^2)}{x^5}$.

ב(2). קבעו, לפי ערכי k , כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$. נמקו.

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 8$, ונתונה הפונקציה $h(t) = \int_0^t f(x) dx$ בתחום זה.

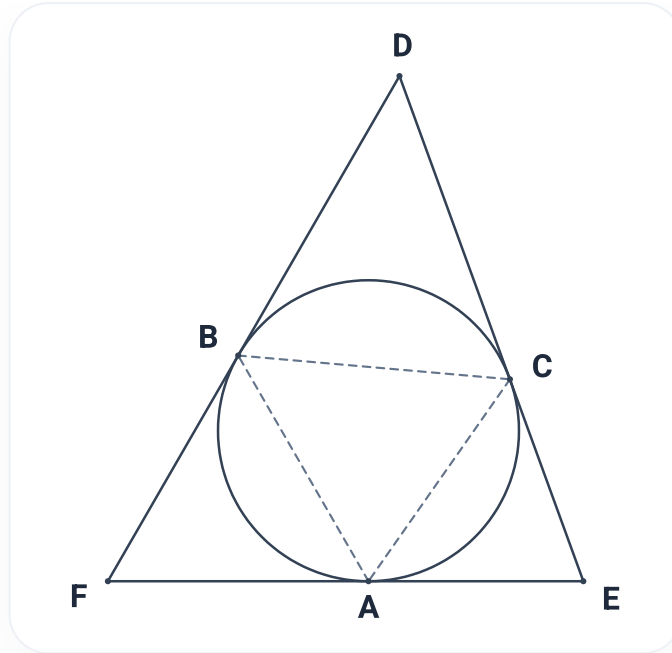


ג(1). מצאו את כל הערכים של t בתחום $0 < t \leq 8$ שבעבורם $h(t) = 0$.

ג(2). מצאו את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של $h(t)$ בתחום $0 \leq t \leq 8$.

המעגל החסום במשולש DEF משיק לצלעות EF, DF ו-DE בנקודות A, B ו-C בהתאמה (ראו סרטוט). נסמן:

$$\angle DEF = \varepsilon, \angle EDF = \delta$$



ד(1). הביעו באמצעות δ ו- ε את זוויות המשולש ABC.

ד(2). הוכיחו כי המשולש ABC חד-זווית, יהיה המשולש DEF אשר יהיה.

שאלה 2 · סדרה הנדסית: סדרת הריבועים, סכום מתחלף ותת-סדרה במקומות האי-זוגיים

נתונה סדרה הנדסית A שאיבריה הם: $a_1, a_2, a_3, \dots$ ומנתה היא q . כל איברי הסדרה A שונים מאפס.

א. האם הסדרה: $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots$ היא סדרה הנדסית? הוכיחו את תשובתכם.

ב(1). מסמנים ב- S_n את הסכום של n האיברים הראשונים של הסדרה A. יהי n מספר טבעי אי-זוגי. הוכיחו כי:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 = S_n \cdot (a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_n)$$

ב(2). נתון: $a_1 = 4$, $q = 2$, ו- n הוא מספר טבעי אי-זוגי. הסכום $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ גדול פי 508 מן הסכום: $a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_n$. מצאו את n .

הסדרה C מתקבלת מן הסדרה A על ידי לקיחת האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים בסדרה A: $c_1 = a_1$, $c_2 = a_3$, $c_3 = a_5$, וכך הלאה. נסמן ב- T_m את הסכום של m האיברים הראשונים של הסדרה C. נתון כי m הוא מספר טבעי אי-זוגי.

ג. נתונה נוסחה: $a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 + \dots + a_{2m-1}^2 = T_m \cdot (a_1 - a_3 + a_5 - \dots + a_{2m-1})$. קבעו אם הנוסחה הנתונה נכונה. הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 3 · הסתברות: מטבע לא הוגן עד שמתקבלות שתי התוצאות, עם p לא ידוע

מטבע לא הוגן מראה "עץ" בהסתברות p ו"פלי" בהסתברות $1 - p$ ($0 < p < 1$), והטלות שונות בלתי תלויות זו בזו.

מטילים את המטבע שוב ושוב, ומפסיקים מייד לאחר שהתקבלו לפחות "עץ" אחד ולפחות "פלי" אחד.

א. הביעו באמצעות p את ההסתברות שיטילו את המטבע 2 פעמים בדיוק, ומצאו את הערך הגדול ביותר האפשרי של הסתברות זו.

נתון כי ההסתברות שיטילו את המטבע 3 פעמים בדיוק היא 0.21, וכי $p < \frac{1}{2}$.

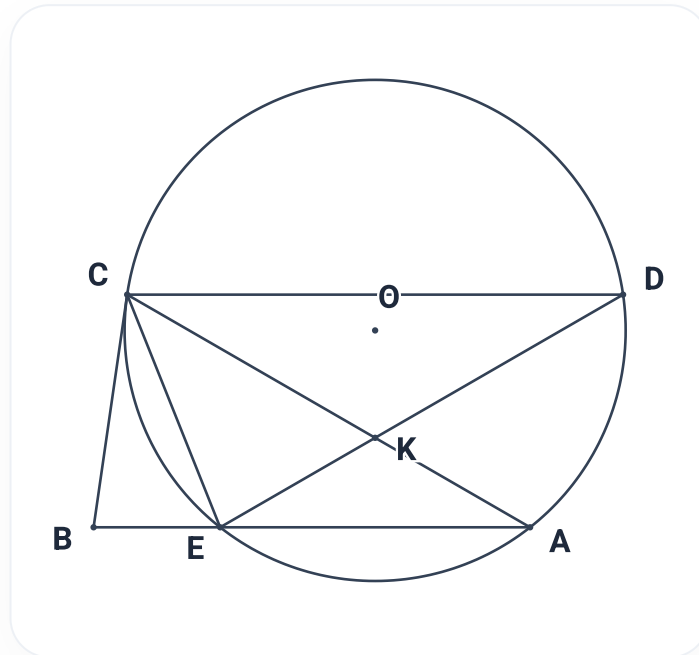
ב. מצאו את p .

ג. מהי ההסתברות שיטילו את המטבע יותר מ-4 פעמים?

ד. ידוע שהטילו את המטבע יותר מ-3 פעמים. מהי ההסתברות שבהטלה הראשונה התקבל "עץ"?

שאלה 4 · משיק, מיתרים מקבילים ודמיון: יחסי שטחים וזווית של 30 מעלות

מנקודה B, שמחוץ למעגל, העבירו ישר שמשיק למעגל בנקודה C, וישר אחר שחותך את המעגל בנקודות E ו-A, כמתואר בסרטוט. הנקודה D נמצאת על המעגל כך שהמיתר CD מקביל למיתר EA. המיתרים ED ו-AC נחתכים בנקודה K.



א. הוכיחו: $\triangle CEB \sim \triangle DCE$.

נתון: $ED = 13$, $AK = 5$. נסמן את שטח המשולש CEK ב- S .

ב. הביעו באמצעות S את שטח המשולש CKD.

נתון: $BC = \frac{91}{\sqrt{192}}$.

ג. הביעו באמצעות S את שטח המשולש CEB.

הנקודה O היא מרכז המעגל.

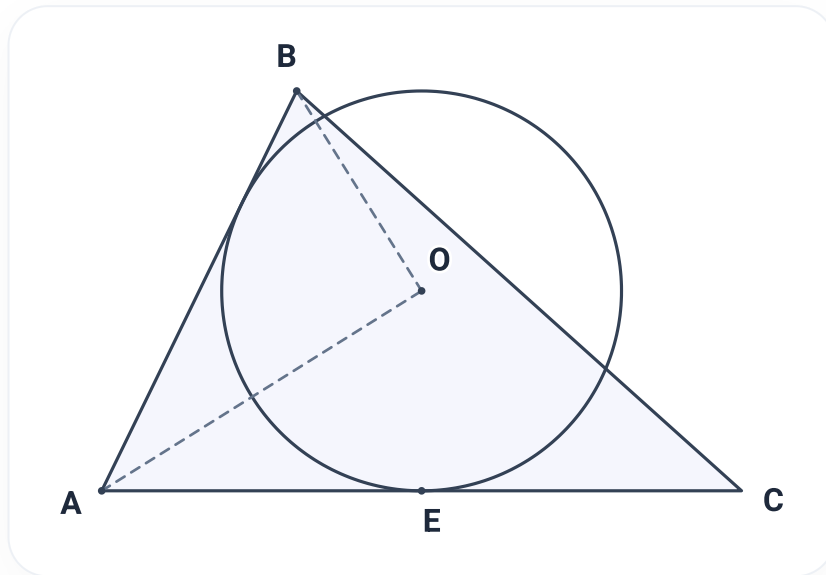
ד. הוכיחו: $\angle COE = \angle CKE$.

נתון: $\angle CAE = 30^\circ$.

ה. הסבירו מדוע הנקודות E, C, O נמצאות על מעגל אחד.

שאלה 5 · משיקים למעגל מנקודה: יחס שטחים כפונקציה של $\cos 2\beta$ ומתי זווית B ישרה

נתון מעגל שמרכזו O ורדיוסו R . מן הנקודה A העבירו שני ישרים AB ו-AC המשיקים למעגל. הנקודה E היא נקודת ההשקה של הישר AC למעגל (ראו סרטוט). נתון: $BO \perp AO$, $AE = CE$. נסמן ב- 2β את הזווית BAC, כאשר β אינה נתונה.



- א. הביעו באמצעות R ו- β את האורכים של AB ושל AC.
- ב. הביעו את היחס $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AOB}}$ באמצעות $\cos 2\beta$ בלבד, ומצאו את כל הערכים שהיחס הזה יכול לקבל.
- ג. מצאו את β שבעבורה הזווית ABC ישרה, ומצאו את היחס $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AOB}}$ עבור β זו.
- ד. נתון כי $S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle AOB}$, ורדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא $2\sqrt{7}$. מצאו את R .

שאלה 6 · פונקציה רציונלית עם פרמטר: חקירה, פונקציה קדומה ומכפלה

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{3x^2}{(x^3-a)^2}$, a הוא פרמטר חיובי.

ענו על סעיפים א-ה. הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

א(3). מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

$g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g'(x) = f(x)$. גרף הפונקציה $g(x)$ עובר בנקודה $(0,0)$. הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות באותו התחום.

ג. מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה $g(x)$.

ד(1). מצאו פונקציה $g(x)$ המקיימת תנאים אלו.

ד(2). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ שמצאתם בתת-סעיף ד(1).

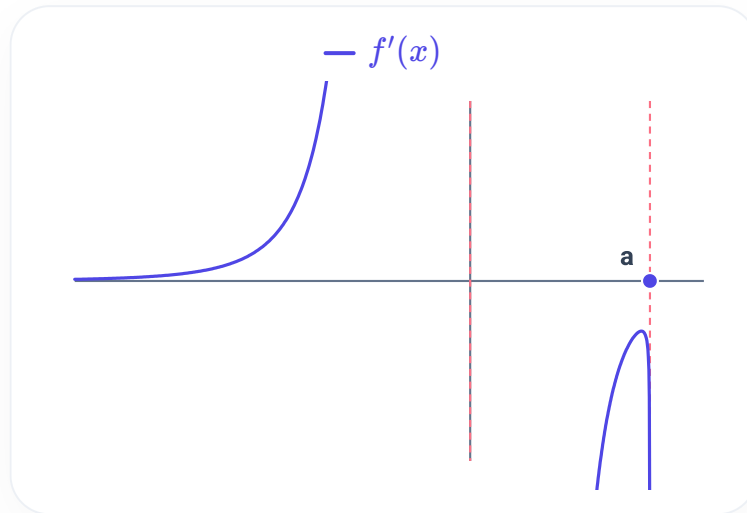
$h(x)$ היא פונקציה המוגדרת כך: $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. הפונקציות $f(x)$ ו- $h(x)$ מוגדרות באותו התחום.

ה(1). מצאו את משוואות האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה $h(x)$.

ה(2). מצאו את תחומי החיוביות של הפונקציה $h(x)$.

שאלה 7 · משפחת פונקציות שורש עם חזקה טבעית: זוגיות החזקה מגרף הנגזרת

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{a-x}}{x^n}$, המוגדרת בתחום $x \leq a$, $x \neq 0$, כאשר a פרמטר חיובי ו- n מספר טבעי. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (בתחום $x < a$, $x \neq 0$).



א. הביעו את $f'(x)$ באמצעות a ו- n .

ב. היעזרו בסרטוט וקבעו אם n זוגי או אי-זוגי. נמקו.

נתון: $f(-1) = 2$, ושיפוע המשיק לגרף $f(x)$ בנקודה שבה $x = -1$ הוא $\frac{31}{4}$.

ג. מצאו את a ואת n .

ד. הציבו את הערכים שמצאתם וחשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $(f(x))^2$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x = 1$.

שאלה 8 · חקירת $\frac{16x}{x^2+3}$, מכפלת קטעים אנכיים שמקסימלית בנקודת הפיתול, והזזה ומתיחה

נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x}$, המוגדרת בתחום: $x \geq 0$, ונתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{16x}{x^2+3}$, המוגדרת לכל x .
א(1). מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

א(2). מצאו את שיעורי נקודות הפיתול של הפונקציה $g(x)$.

א(3). סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של כל אחת מן הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

בנקודה $C(t, 0)$, $t > 0$, מעבירים אנך לציר ה- x . האנך חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A ואת הגרף של הפונקציה $g(x)$ בנקודה B.

ב. הביעו באמצעות t את מכפלת אורכי הקטעים AC ו-BC.

ג. הוכיחו כי מכפלת אורכי הקטעים AC ו-BC מקסימלית כאשר הנקודה B היא נקודת פיתול של הפונקציה $g(x)$.

נתונה הפונקציה: $k(x) = \frac{4(x-1)\sqrt{x-1}}{(x-1)^2+3}$, המוגדרת בתחום: $x \geq 1$.

ד. היעזרו בסעיפים הקודמים של השאלה. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $k(x)$, וקבעו את סוגה. נמקו את תשובתכם.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math