

שאלה 1 · שאלות קצרות: אינדוקציה, מרכז המעגל החסום, פונקציה אי-זוגית ונגזרת, שורש של פולינום

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א(1). הוכיחו באינדוקציה מתמטית או בדרך אחרת כי השוויון שלפניכם מתקיים בעבור כל n טבעי:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

א(2). האם הביטוי: $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \dots + (2n-1)(2n+1)$ שווה ל- $\frac{2n+1}{n}$ בעבור כל n טבעי? נמקו את תשובתכם.

המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O. הנקודה K היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC. נסמן: $\angle ACB = \alpha$. הביעו באמצעות α את היחס בין רדיוס המעגל החסום את משולש ABC, ובין רדיוס המעגל החסום את משולש AKB.
 ב(1).

נתון כי היחס שהבעתם בתת-סעיף (1) שווה ל-1, וכי הצלע CB משיקה למעגל החסום את משולש AKB. הוכיחו כי המשולש ABC הוא משולש שווה-צלעות.
 ב(2).

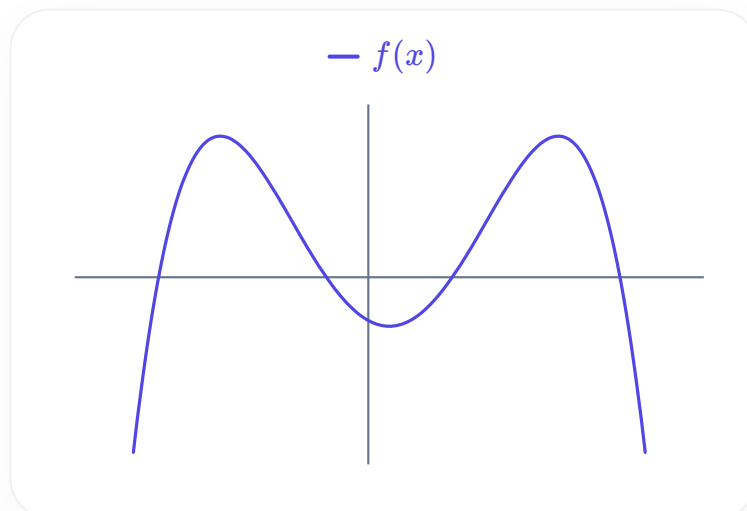
נתון כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית ורציפה המוגדרת לכל x . לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מקסימום אחת בלבד ובה: $x = -2$. אחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x היא בנקודה $(3, 0)$.
 ג(1). סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון כי הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה זוגית המוגדרת לכל x . פונקציית הנגזרת $g'(x)$ מקיימת:
 $g'(x) = -f(x)$. נתון: $g(3) = 1$.

ג(2). מצאו את שיעורי נקודות המקסימום של הפונקציה $g(x)$.

ג(3). לפניכם שני היגדים I-II. קבעו עבור כל היגד אם הוא נכון או לא נכון. נמקו את קביעותיכם.
 I. $g(x) \leq 1$ לכל x .
 II. שיעור ה- y של נקודת המינימום של הפונקציה $g(x)$ הוא בין 1 ל-3.

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x . אחד מן הביטויים I-IV שלפניכם מייצג את הפונקציה $f(x)$.



ד(1). קבעו איזה מן הביטויים מייצג את הפונקציה $f(x)$, נמקו את קביעתכם:

I. $f(x) = -x(x+5)(x-6)$

II. $f(x) = -(x+5)(x+1)(x-2)(x-6)$

III. $f(x) = (x+5)(x+1)(x-2)(x-6)$

IV. $f(x) = -(x+5)(x-1)(x-2)(x-6)$

נתונה הפונקציה: $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

ד(2). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ד(3). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתון: $\int_2^5 g(x) dx = k$.

ד(4). הביעו באמצעות k את הערך של: $\int_0^3 [3 \cdot g(x+2) - 2] dx$.

שאלה 2 · סדרה הנדסית: יחס בין סכום B לסכום תת-הסדרה שלה, כפונקציה של המנה

נתונה סדרה הנדסית אין-סופית A שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \dots$, האיבר הראשון שלה $a_1 \neq 0$ ומנתה q , כאשר

$$q \neq -1, q \neq 1, q \neq 0$$

בונים מאיברי A סדרה B: $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$ לכל n טבעי.

מאיברי B שבמקומות האי-זוגיים בונים סדרה C: $b_1, b_3, b_5, \dots$.

א. מצאו בעבור אילו ערכים של q לסדרה B יש סכום.

ב. נסמן ב- S_B את סכום הסדרה B וב- S_C את סכום הסדרה C (בעבור הערכים של q שמצאתם בסעיף א). הביעו באמצעות q את היחס $\frac{S_C}{S_B}$.

ג. מצאו את כל הערכים של m שבעבורם יש סדרה A (שמקיימת את התנאי מסעיף א) כך ש- $S_C = m \cdot S_B$.

נתון: $S_C = 0.9 \cdot S_B$, $S_B = -\frac{3}{128}$, $a_2 > 0$.

ד. מצאו את a_1 ואת q .

שאלה 3 · טבלה דו-ממדית בפרמטר: התנדבות בקרב בנים ובנות

בבית ספר גדול נערך סקר ובו נבדק אם התלמידים מתנדבים בקהילה. בסקר השתתפו תלמידים רבים – בנים ובנות. בסקר נמצא שמספר הבנות המתנדבות גדול פי 2 ממספר הבנים המתנדבים, ומספר הבנות שאינן מתנדבות גדול פי $1\frac{1}{2}$ ממספר הבנות המתנדבות. נסמן ב- p את ההסתברות לבחור באקראי בן מתנדב מבין כלל המשתתפים בסקר.

א. מצאו את ההסתברות לבחור באקראי בת מתנדבת מבין כלל הבנות שהשתתפו בסקר.

ב. בוחרים באקראי ארבע בנות מבין הבנות שהשתתפו בסקר. מצאו את ההסתברות שבדיוק שלוש מהן מתנדבות.

ג(1). הביעו באמצעות p את ההסתברות לבחור באקראי בן שאינו מתנדב מבין כלל המשתתפים בסקר.

ג(2). הראו כי תחום הערכים האפשרי בעבור p הוא: $0 < p < \frac{1}{6}$.

ידוע כי ההסתברות לבחור באקראי בת מבין משתתפי הסקר שאינם מתנדבים גדולה פי 2 מההסתברות לבחור באקראי בן מבין משתתפי הסקר שאינם מתנדבים.

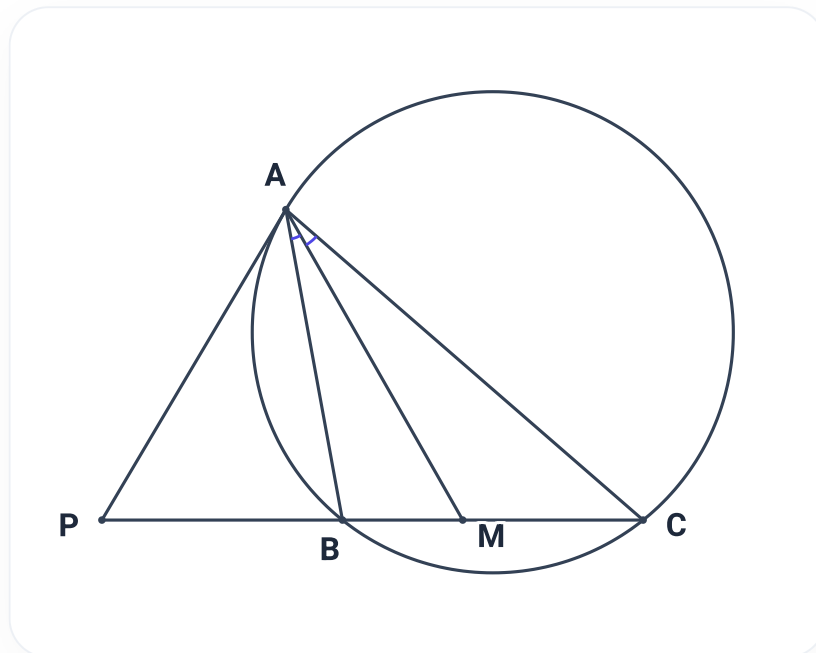
ד. מצאו את הערך של p .

ה. האם המאורעות "להתנדב" ו"להיות בת" תלויים זה בזה? נמקו את תשובתכם.

שאלה 4 · משיק, חותך וחוצה זווית: $PA = PM$, אורכים מבעיה הפוכה, וחוצה זווית שאינו יכול להיות

תיכון

מנקודה P שמחוץ למעגל יוצאים משיק למעגל בנקודה A , וחותר שחותך את המעגל בנקודות B ו- C (B בין P ל- C). חוצה הזווית BAC חותך את הצלע BC בנקודה M (ראו סרטוט).



א. הוכיחו כי $PA^2 = PB \cdot PC$.

ב. הוכיחו כי $PA = PM$.

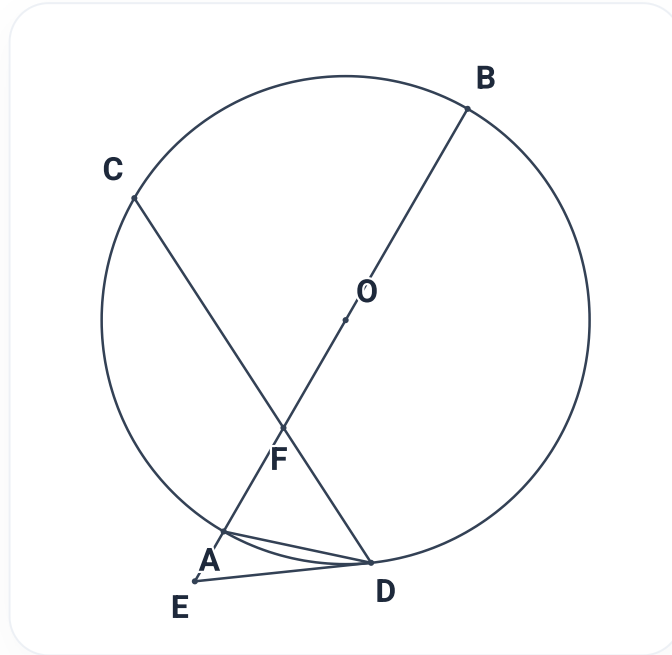
נתון: $PB = 4$, $MC = 3$.

ג. מצאו את האורכים PA ו- BC .

ד. הוכיחו כי בכל מצב כמו בסרטוט (לכל מעגל ולכל נקודה P) הקטע AM אינו יכול להיות תיכון במשולש ABC .

שאלה 5 · מעגל, משיק וקוטר: משולש שווה-שוקיים EFD , שטח במשפט הסינוסים ומשוואה עם $\tan \alpha$

AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R ומרכזו O . המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשיך הקוטר AB בנקודה E . הנקודה F נמצאת על הקוטר AB , וההמשך של הקטע DF חותך את המעגל בנקודה C (ראו סרטוט). נסמן: $\angle ADE = \alpha$.



א. הראו כי: $\angle AED = 90^\circ - 2\alpha$.

נתון כי: $EF = ED$.

ב. הביעו באמצעות α את גודל $\angle AFD$.

ג. הביעו באמצעות α ו- R את שטח המשולש AFD .

ד(1). הביעו באמצעות α את יחס השטחים $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}}$.

ד(2). נתון כי: $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}} = \sqrt{2}$. מצאו את α .

שאלה 6 · חקירת $\sin^2 x \cos x$: שני ענפים של $\frac{1}{\sqrt{f}}$, מספר חיתוכים עם $y = m$ ומרחק מינימלי

נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin^2(x) \cdot \cos(x)$ המוגדרת בתחום: $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, ונתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$.

א. חקרו את הפונקציה $f(x)$: זוגיות, נקודות החיתוך עם הצירים, ונקודות הקיצון (כולל נקודות הקצה) וסוגן.

ב. מצאו את תחום ההגדרה של $g(x)$, את האסימפטוטות האנכיות שלה ואת נקודות הקיצון שלה.

ג. מצאו את כל הערכים של m שבעבורם הישר $y = m$ חותך את גרף הפונקציה $g(x)$ בארבע נקודות בדיוק.

ד. מצאו את המרחק המינימלי בין הגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$ בתחום שבו שתי הפונקציות מוגדרות.

שאלה 7 · הפונקציה $f(x) = \frac{\cos x - a}{(\cos x + 1)^2}$: פרמטר מהשקה לציר x , חקירה בשני מחזורים והערכת אינטגרל בעזרת

קעירות

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\cos(x)-a}{(\cos(x)+1)^2}$, a הוא פרמטר חיובי. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x המקיים: $\cos(x) \neq -1$. נתון כי הגרף של הפונקציה $f(x)$ משיק לציר x בכל נקודות הקיצון שלה.

א. מצאו את הערך של a .

הציבו: $a = 1$, וענו על הסעיפים ב-ה עבור התחום: $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

ב(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב(2). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ב(3). מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. כמה פתרונות יש למשוואה: $f(x) = -6$ בתחום הנתון? נמקו את תשובתכם.

ידוע כי הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה בכל אחד מחלקי תחום הגדרתה.

ה. קבעו אם הטענה שלפניכם נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעתכם. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx > -\frac{\pi}{4}$.

שאלה 8 · מקבילית עם שטח קבוע: האלכסון הקצר ביותר לפי יחס הצלעות

נתונה מקבילית $ABCD$ ששטחה 24. נתון: $AD = k \cdot AB$, כאשר $k > 0$ הוא פרמטר. נסמן: $\angle BAD = x$, $0^\circ < x < 180^\circ$.

א. הביעו את BD^2 באמצעות x ו- k .

ב. נניח כי $k \neq 1$. הביעו באמצעות k את האורך המינימלי של האלכסון BD .

ג. ידוע כי האורך המינימלי של האלכסון BD הוא 8. מצאו את כל הערכים האפשריים של k .

ד. הראו כי כאשר $k = 1$ אין לאורך האלכסון BD ערך מינימלי.

כל הבגריות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math