

שאלה 1 · שאלות קצרות: סכום $n(n+2)$ באינדוקציה, $x\sqrt{9-x^2}$ ושטח של f^2 , גרף של $\frac{1}{f-3}$, שטח

משולש ישר זווית שצלעותיו בסדרה הנדסית

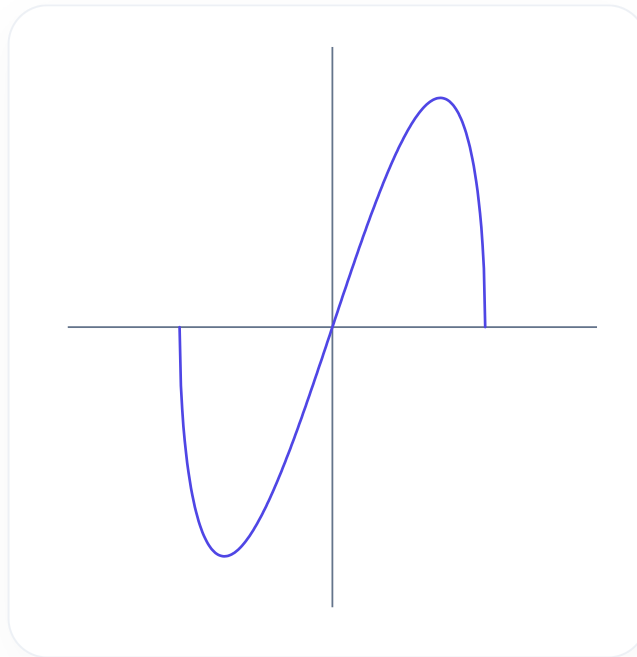
ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

נתון כי השוויון $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$ מתקיים בעבור $n = 2$. הוא פרמטר שונה מ-0.

א(1). מצאו את הערך של b .

א(2). הציבו $b = 6$ והוכיחו באינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי השוויון הנתון מתקיים לכל n טבעי.

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $-3 \leq x \leq 3$.



אחד מן הביטויים I-IV שלפניכם מייצג את הפונקציה $f(x)$.

I. $f(x) = x\sqrt{9-x^2}$

II. $f(x) = -x\sqrt{9-x^2}$

III. $f(x) = x\sqrt{x^2-9}$

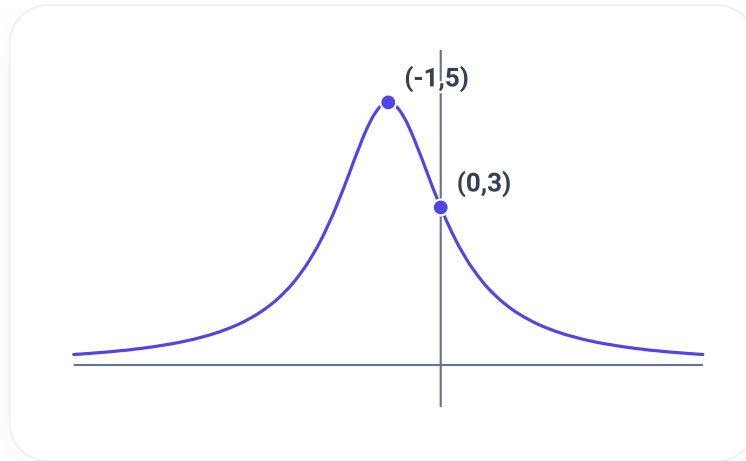
IV. $f(x) = -x\sqrt{x^2-9}$

ב(1). קבעו איזה מן הביטויים מייצג את הפונקציה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.

נתונה הפונקציה $g(x) = (f(x))^2$ המוגדרת בתחום $-3 \leq x \leq 3$.

ב(2). חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x . לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד ואסימפטוטה אופקית אחת בלבד שמשוואתה היא $y = 0$. שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ ושיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y מוצגים בסרטוט.



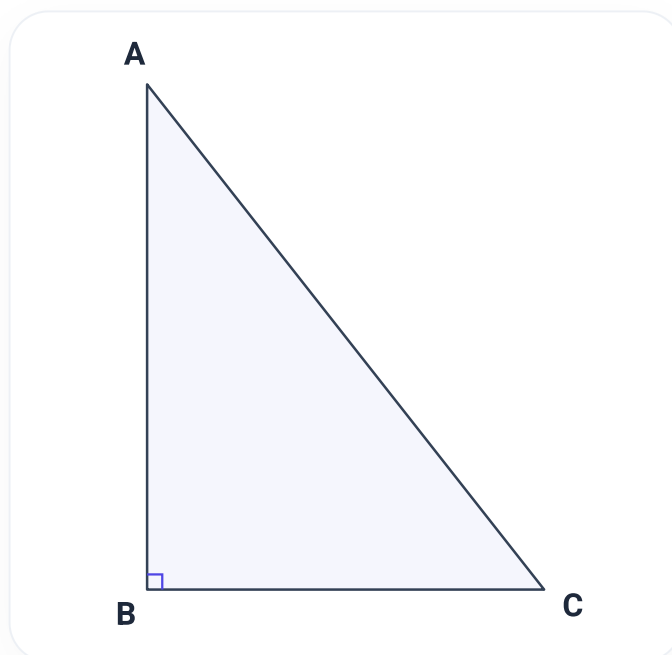
נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)-3}$.

ג(1). כמה אסימפטוטות המאונכות לציר ה- x יש לפונקציה $g(x)$? נמקו את תשובתכם.

ג(2). מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה- y של הפונקציה $g(x)$.

ג(3). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

בסרטוט שלפניכם משולש ישר זווית ABC ($\angle ABC = 90^\circ$).



נתון כי אורכי צלעות המשולש הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית. האיבר הראשון בסדרה שווה לאורך הצלע BC .

נתון: $BC = 3$.

ד(1). האם ייתכן שהסדרה יורדת? נמקו את תשובתכם.

ד(2). מצאו את שטח המשולש ABC (בתשובתכם תוכלו להשאיר שורש).

שאלה 2 · סדרה חשבונית והסדרה $b_n = S_{n+2} - S_n$: סכום מתחלף של ריבועים ותת-סדרה במקומות האי-**זוגיים**

נתונה סדרה חשבונית A עולה שאיבריה הם: $a_1, a_2, a_3, \dots$ והפרשה d . מסמנים ב- S_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה A, לכל n טבעי. מגדירים סדרה נוספת, B, שאיבריה הם: $b_1, b_2, b_3, \dots$. איברי הסדרה B מקיימים: $b_n = S_{n+2} - S_n$ לכל n טבעי.

א(1). האם הסדרה B היא סדרה חשבונית? אם כן, מצאו את הפרשה. נמקו.

א(2). האם הסדרה B זהה לסדרה A? נמקו.

מסמנים ב- T_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה B, לכל n טבעי.

ב. הוכיחו כי לכל n טבעי זוגי מתקיים:

$$T_n = \frac{(b_1 + b_2)(b_1 - b_2) + (b_3 + b_4)(b_3 - b_4) + \dots + (b_{n-1} + b_n)(b_{n-1} - b_n)}{-2d}$$

נתון:

$$b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \dots + b_{37}^2 - b_{38}^2 = -152$$

$$T_5 = -25$$

ג. חשבו את b_1 ואת d (אפשר להיעזר בסעיף ב).

מחברים בזה אחר זה את איברי הסדרה A הנמצאים במקומות האי-זוגיים, החל באיבר הראשון.

ד. מהו המספר המינימלי של איברים שיש לחבר באופן זה כדי שהסכום שיתקבל יהיה מספר חיובי ושלם? נמקו.

שאלה 3 · שתי קופסאות כרטיסים: התניה בצבעים שונים, מספר זוגי של ניסיונות וחסם על מספר הכרטיסים

בקופסה א' יש 12 כרטיסים כחולים ו-8 כרטיסים ירוקים, ובקופסה ב' יש רק כרטיסים כחולים.

נועה בוחרת באקראי קופסה ומוציאה ממנה באקראי כרטיס. אם הכרטיס ירוק, היא מוציאה באקראי כרטיס שני מאותה קופסה בלי להחזיר את הראשון. אם הכרטיס כחול, היא מחזירה אותו ומוציאה שוב באקראי כרטיס מאותה קופסה.

א. ידוע שנועה הוציאה שני כרטיסים בצבעים שונים. מהי ההסתברות שהכרטיס הראשון היה כחול?

נועה מחזירה את הכרטיסים. עכשיו היא מבצעת את התהליך הזה: בוחרת באקראי קופסה, מוציאה ממנה כרטיס אחד ומחזירה אותו. היא חוזרת על התהליך עד שהיא מוציאה כרטיס כחול, ואז מפסיקה.

ב(1). מצאו את ההסתברות שנועה ביצעה את התהליך מספר זוגי של פעמים.

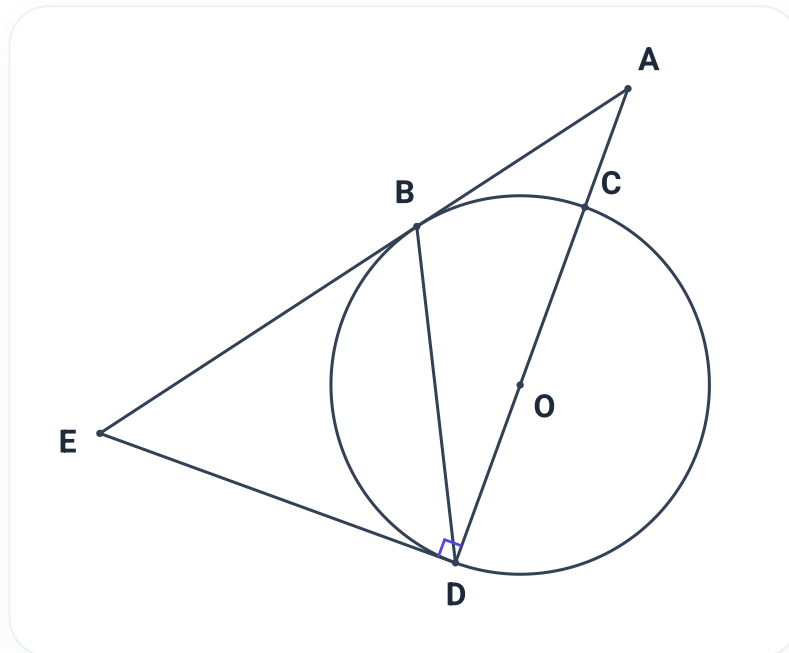
ב(2). מהו המספר הקטן ביותר n שבעבורו ההסתברות שנועה תפסיק אחרי n פעמים לכל היותר גדולה מ-0.999?

העבירו חלק מן הכרטיסים מקופסה ב' לקופסה א', ובקופסה ב' נשארו כרטיסים. אחר כך בחרו באקראי קופסה והוציאו ממנה כרטיס אחד. נתון כי עכשיו ההסתברות שהכרטיס כחול היא לפחות 0.9.

ג. מהו המספר הקטן ביותר של כרטיסים שהיו בקופסה ב' לפני ההעברה?

שאלה 4 · משיק, חותך דרך המרכז ומשיק בקצה הקוטר, זוויות, דמיון ויחס שטחים

נתון מעגל שרדיוסו R ומרכזו O . מנקודה A שמחוץ למעגל יוצאים שני ישרים: הישר AB משיק למעגל בנקודה B , והישר AD עובר דרך מרכז המעגל O וחותך את המעגל בנקודות C ו- D (C בין A ל- O). המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשיך הישר AB בנקודה E (ראו סרטוט). נסמן: $\angle ADB = \alpha$.



א. הביעו את כל זוויות המשולש ADE באמצעות α .

ב. הוכיחו: $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{BD}$.

נתון: $AB = 8$, $DE = 12$.

ג. חשבו את R .

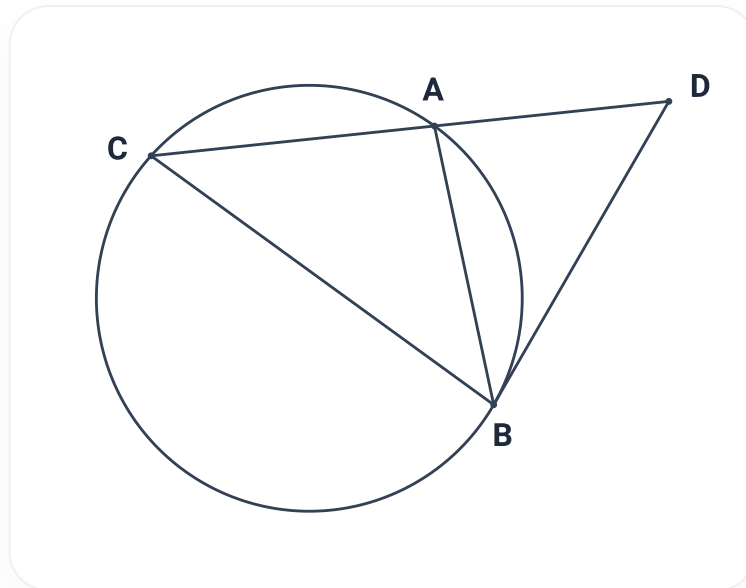
נסמן ב- S את שטח המשולש BDC . מחברים את O עם E .

ד(1). הוכיחו: $\triangle EDO \sim \triangle DBC$.

ד(2). הביעו את שטח המשולש EDO באמצעות S .

שאלה 5 · משיק וחותר במעגל: $\angle DBC = 2\alpha$, יחס שטחים כפונקציה של α ותנאי קיום

המשולש ABC חסום במעגל שהרדיוס שלו הוא R . המשיק למעגל בנקודה B חותך את המשך הצלע CA (מעבר לנקודה A) בנקודה D , כמתואר בסרטוט. נסמן: $\angle ABD = \alpha$. נתון: $\angle DBC = 2\alpha$. נסמן ב- k את היחס בין שטח המשולש BDC ובין שטח המשולש BDA .



א. הביעו באמצעות α את זוויות המשולש ABC , ובאמצעות R ו- α את אורכי הצלעות AB ו- BC .

ב. הביעו את k באמצעות α .

נתון: $k = 2.5$, $AD = 5$.

ג. מצאו את α ואת R .

ד. מצאו את כל הערכים של k שבעבורם קיים סרטוט כזה (משולש ABC , והמשיק ב- B חותך את המשך CA מעבר ל- A).

שאלה 6 · חקירת $\frac{x(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)^3}$ **כנגזרת של** $\frac{x^2}{(\sqrt{x}-1)^2}$ **: קיצון בקצה, משיקים, פיתול ואינטגרל**
 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)^3}$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

א(3). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

א(4). מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{x^2}{(\sqrt{x}-1)^2}$ המוגדרת באותו התחום כמו הפונקציה $f(x)$.

ג. הראו כי לכל $x > 0$ בתחום ההגדרה של הפונקציות מתקיים: $f(x) = g'(x)$.

ד. לפינכם טענות I-II. קבעו בנוגע לכל טענה אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעותיכם.

I. יש משיק לגרף הפונקציה $g(x)$ ששיפועו הוא 1.2.

II. לפונקציה $g(x)$ יש שתי נקודות פיתול.

ה. חשבו את ערך הביטוי: $\int_4^9 g(x) \cdot f(x) dx$.

שאלה 7 · משפחת פונקציות $\frac{\sin x}{k+\sin^2 x}$ **: קיצון לפי הפרמטר, בעיה הפוכה ומספר פתרונות**

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sin x}{k+\sin^2 x}$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$, כאשר k הוא פרמטר חיובי.

א. מצאו, לכל ערך של k , את כל ערכי x בתחום $0 < x < 2\pi$ שבהם $f'(x) = 0$.

בסעיף ב הציבו $k = \frac{1}{4}$.

ב. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של $f(x)$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$, וקבעו את סוגן.

נתון כי הערך הגדול ביותר של $f(x)$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$ הוא $\frac{1}{4}$.

ג. מצאו את k .

ד. הציבו את k שמצאתם, ומצאו את מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = m$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$, לכל ערך של m .

שאלה 8 · שלוש פונקציות רציונליות: איזו מהן עם אסימפטוטה אנכית אחת ואופקית אחת, סקיצה ומלבן בעל**היקף מינימלי**

לפניכם שלוש פונקציות, שלכל אחת מהן יש שני ערכי x שבהם היא אינה מוגדרת.

$$g(x) = \frac{2x^2 + 1}{(x-1)(x+1)}, \quad h(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{(x-1)(x-2)}, \quad k(x) = \frac{x^3 - 4x}{(x-1)(x+2)}$$

ידוע כי לאחת משלוש הפונקציות יש אסימפטוטה אופקית אחת ואסימפטוטה אנכית אחת בלבד.

א. מבין שלוש הפונקציות הנתונות, קבעו איזו פונקציה מקיימת את כל התכונות הללו. נמקו.

ענו על סעיפים ב-ד עבור הפונקציה שקבעתם בסעיף א.

ב(1). מצאו את המשוואה של האסימפטוטה האופקית ושל האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

ב(2). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

נתון כי לפונקציה זו אין נקודות קיצון.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

נסמן נקודה D על גרף הפונקציה, שעבורה $2 < t < 3$, $x = t$.

מהנקודה D מעבירים שני ישרים, האחד מאונך לציר ה- x והאחר מאונך לאסימפטוטה האנכית של הפונקציה, כך שנוצר מלבן על ידי הישרים, על ידי האסימפטוטה האנכית ועל ידי ציר ה- x .

ד. מצאו את ערכו של t , שעבורו היקף המלבן המתקבל הוא מינימלי. תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math