

שאלה 1 · שאלות קצרות: אינדוקציה, טרפז בר-חסימה, גרפים של f , f' , f'' ופונקציה רציונלית

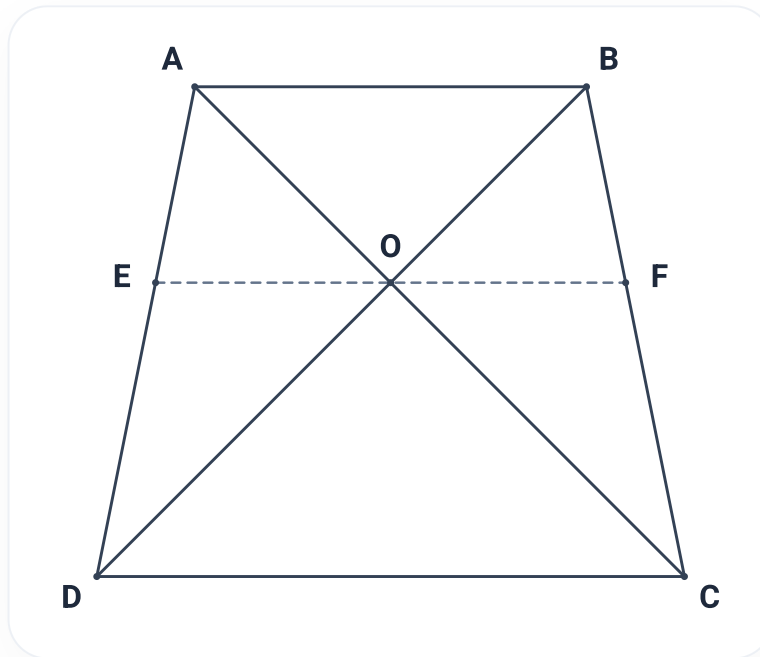
ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א(1). הוכיחו באינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \dots + (2n-1)(2n+1) = \frac{n(4n^2+6n-1)}{3}$$

א(2). חשבו את הערך של הסכום: $5 \cdot 7 + 7 \cdot 9 + 9 \cdot 11 + \dots + 39 \cdot 41$.

בסרטוט שלפניכם טרפז ABCD ($AB \parallel CD$). הנקודה O היא מפגש אלכסוני הטרפז.
 נתון: $\angle DAO = \angle CBO$.



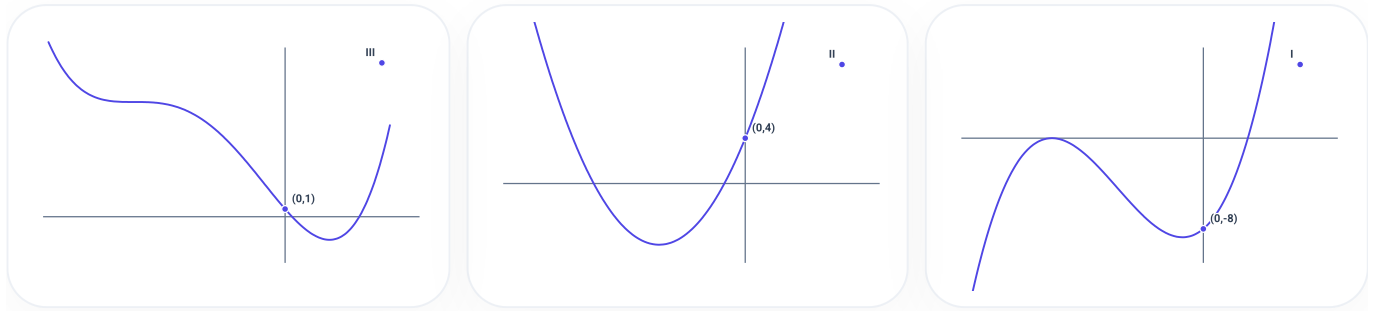
ב(1). הוכיחו כי הטרפז ABCD הוא שווה שוקיים.

דרך הנקודה O העבירו קטע EF המקביל לבסיסי הטרפז, כך ש-E על השוק AD ו-F על השוק BC.
 נתון כי אלכסוני הטרפז מאונכים זה לזה, $AB = 8\sqrt{2}$, $AC = 20$.

ב(2). מצאו את אורך הקטע EF.

הפונקציה $f(x)$, פונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ ופונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ מוגדרות לכל x .
 לפניכם שלושה גרפים I-III. אחד מן הגרפים מתאר את הפונקציה $f(x)$, אחד את פונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ ואחד את פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$.

בכל אחד מן הגרפים מופיעות כל נקודות הקיצון וכל נקודות החיתוך שלו עם ציר ה- x . על כל אחד מן הגרפים כתובים שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה- y .



ג(1). התאימו לכל אחת מן הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $f''(x)$ את הגרף המתאר אותה. נמקו את תשובתכם.

ג(2). כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$? נמקו את תשובתכם.

שיעורי נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$ הם $(a, -3)$.

ג(3). מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f'(x)$, על ידי גרף הפונקציה $f''(x)$, על ידי הישר $x = a$ ועל ידי ציר ה- y .

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{3(x^2-1)}{(x^3-3x+2)^2}$, המוגדרת בתחום: $x \neq -2$, $x \neq 1$.

ד(1). מצאו את תחומי החיוביות של הפונקציה $f(x)$.



ד(2). קבעו איזה מבין הגרפים I-IV שלפניכם מתאר את הפונקציה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.

ד(3). חשבו את השטח הכלוא על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = 2$ ו- $x = 3$.

שאלה 2 · סדרה הנדסית מתחלפת, $b_n = \frac{k^{2n}}{a_n}$: טווח הסכום ופרמטר שבעבורו האיברים שנמחקו הם שליש מהסכום

מהסכום

נתונה סדרה הנדסית A שאיבריה $a_1, a_2, \dots, a_{2m}$ ($m > 1$ טבעי, m). נתון: $a_1 = 3$. סכום האיברים שבמקומות הזוגיים בסדרה הוא פי (-2) מסכום האיברים שבמקומות האי-זוגיים.

א. מצאו את מנת הסדרה A.

המשיכו את הסדרה A כך שנוצרה סדרה הנדסית אין-סופית. נתונה סדרה אין-סופית B שאיבריה מקיימים $b_n = \frac{k^{2n}}{a_n}$ לכל n טבעי. k הוא פרמטר שונה מ-0.

ב. הוכיחו כי B היא סדרה הנדסית, והביעו את המנה שלה באמצעות k .

ג. מצאו את תחום הערכים של k שבעבורם סכום הסדרה B מתכנס.

נתון כי סכום הסדרה B מתכנס.

ד. הביעו באמצעות k את סכום הסדרה B, ומצאו את כל הערכים שסכום הסדרה B יכול לקבל.

בסדרה B מחקו כל איבר שלישי $(b_3, b_6, b_9, \dots)$.

ה. מצאו את ערכי k שבעבורם סכום האיברים שנמחקו הוא שליש מסכום הסדרה B.

שאלה 3 · דגימה בלי החזרה: מבחן נגינה, מציאת מספר הקטעים והסתברות מותנית

כדי להתקבל לתזמורת נוער יש לעבור מבחן נגינה. כל הקטעים במבחן הם מתוך מאגר שיש בו n קטעי נגינה שונים, והמועמדים יכולים להתכונן למבחן באמצעותו. ביום המבחן, כל מועמד מוציא באקראי מתוך קופסה שלושה פתקים בזה אחר זה, ללא החזרה. בכל פתק כתוב שם של קטע אחד מתוך המאגר; מספר הפתקים בקופסה שווה למספר הקטעים במאגר, ובכל פתק כתוב קטע אחר. לאחר שהמועמד הוציא שלושה פתקים, הוא מחזיר אותם לקופסה. המועמד יתקבל לתזמורת אם ינגן היטב לפחות שניים מתוך שלושת הקטעים שבפתקים שהוציא.

מאיה התכוננה למבחן באמצעות המאגר. היא יודעת לנגן היטב רק 16 קטעים מתוך n הקטעים שבמאגר, ואת שאר הקטעים היא אינה יודעת לנגן היטב.

ידוע כי ההסתברות שמאיה יודעת לנגן היטב לפחות קטע אחד מבין שני הקטעים שבשני הפתקים הראשונים שהיא מוציאה היא $\frac{8}{15}$.

א(1). מצאו את n .

א(2). מהי ההסתברות שמאיה תתקבל לתזמורת?

ב. אם ידוע כי מאיה התקבלה לתזמורת, מהי ההסתברות שהיא לא ידעה לנגן היטב את הקטע שבפתק הראשון שהוציאה?

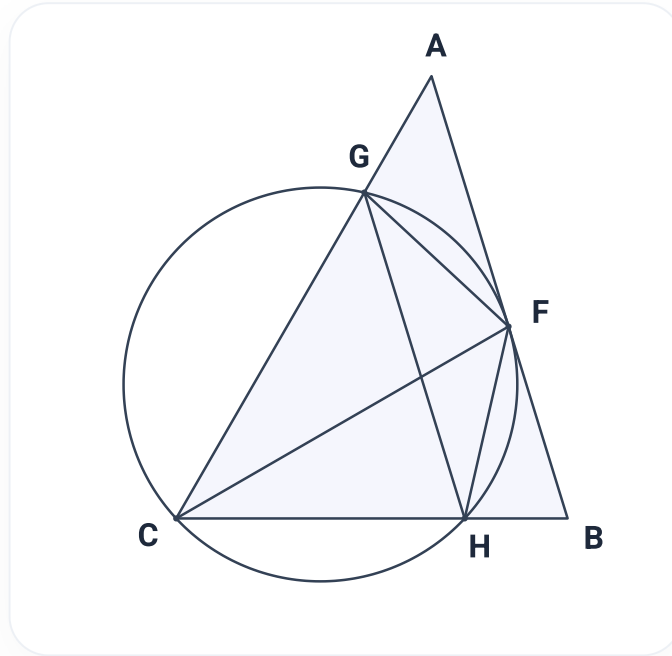
גם עומר התכונן למבחן באמצעות המאגר. הוא יודע לנגן היטב 32 קטעים מתוך n הקטעים שבמאגר, ואת השאר אינו יודע לנגן היטב.

אם ההסתברות שעומר ינגן היטב את כל שלושת הקטעים שבפתקים שהוא מוציא גדולה פי 8 מן ההסתברות שמאיה תנגן היטב את כל שלושת הקטעים שבפתקים שהיא מוציאה? נמקו את תשובתכם.

שאלה 4 · מעגל המשיק לצלע במשולש עם זווית של 60° : יחס החלוקה, אורך המיתר באמצעות הצלעות,

חסם ובעיה הפוכה

במשולש ABC נתון $\angle ACB = 60^\circ$. נסמן: $BC = b$, $AC = a$.
מעגל עובר דרך הקודקוד C , חותך את הצלעות AC ו- BC בנקודות G ו- H בהתאמה, ומשיק לצלע AB בנקודה F . נתון: $GH \parallel AB$.



א. הוכיחו: $\frac{AF}{FB} = \frac{a}{b}$.

ב. הביעו באמצעות a ו- b את היחס $\frac{GH}{AB}$.

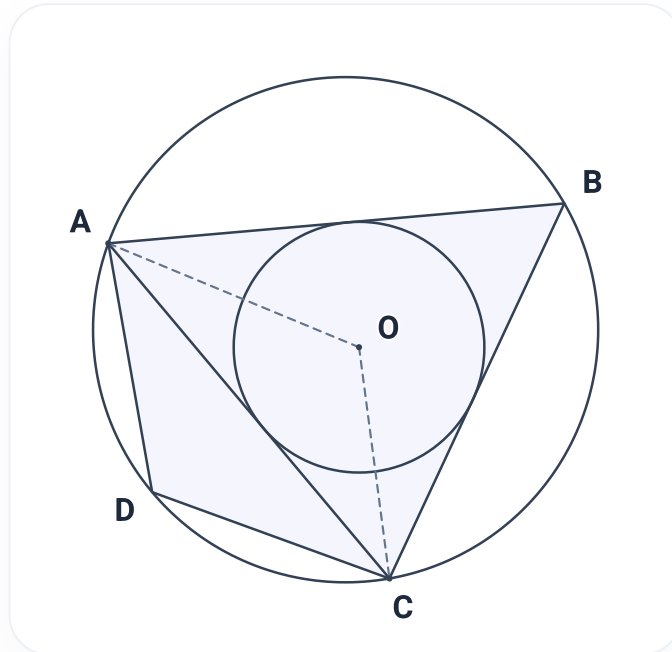
ג. הוכיחו שבכל משולש כזה $GH \leq \frac{3}{4}AB$. באיזה משולש מתקבל שוויון?

נתון: $AB = 7$, $\frac{GH}{AB} = \frac{120}{169}$, $AC > BC$.

ד. מצאו את AC , את BC ואת רדיוס המעגל.

שאלה 5 · מרובע חסום במעגל ומרכז המעגל החסום במשולש: משפט הסינוסים, שטח ומרחק בין מרכזים

מרובע $ABCD$ חסום במעגל שרדיוסו R . נתון: $DA = DC$ ו- $\angle ADC = 120^\circ$. הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC (ראו סרטוט). נסמן: $\angle CAB = \alpha$.



א(1). מצאו את זווית המשולש AOC (הביעו באמצעות α במידת הצורך).

א(2). הביעו את אורך הקטע AO באמצעות α ו- R .

נתון כי $AO = 1.2R$.

ב. מצאו את גודל הזווית α .

נתון כי שטח המרובע $ABCD$ הוא 40.86 (בקירוב).

ג. מצאו את R .

ד. חשבו את המרחק בין מרכז המעגל החסום את המרובע לבין מרכז המעגל החסום במשולש ABC .

שאלה 6 · משפחה של פונקציות רציונליות: מיון לפי סימן הפרמטר, שטח עם שני פתרונות ומספר פתרונות

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x}{(x^2+m)^2}$, m הוא פרמטר שונה מ-0.

א. מצאו עבור אילו ערכים של m יש לגרף $f(x)$ אסימפטוטות אנכיות, וכתבו את משוואותיהן באמצעות m .
בסעיף ב $m > 0$.

ב. הביעו באמצעות m את שיעורי נקודות הקיצון של $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. מצאו את כל הערכים של m ($m \neq 0$) שבעבורם השטח המוגבל על ידי גרף $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x = 1$ הוא $\frac{1}{12}$.

הציבו $m = 2$.

ד. מצאו את מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = t$ לכל ערך של t .

שאלה 7 · פונקציה טריגונומטרית עם פרמטר: אפסים, שיפוע מערך של $\cos x$, קיצון בתחום סגור, גרף

הנגזרת ואינטגרל $f^2 f'$

נתונה הפונקציה: $f(x) = (b + \cos^2 x) \sin x$, המוגדרת בתחום: $-\pi \leq x \leq \pi$, b הוא פרמטר.

א. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית? נמקו את תשובתכם.

נתון כי לגרף הפונקציה $f(x)$ יש בדיוק שלוש נקודות חיתוך עם ציר ה- x .

ב. לפניכם שלוש אפשרויות I-II-III לערכים של b . קבעו איזו אפשרות יכולה להתאים לפונקציה $f(x)$, ונמקו את קביעתכם. I. $b = 0$. II. $-1 < b < 0$. III. $b > 0$.

נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$, כאשר: $\cos x = \frac{1}{3}$, הוא: $-\frac{7}{18}$.

ג. מצאו את הערך של b .

הציבו $b = \frac{1}{2}$ בפונקציה $f(x)$, וענו על הסעיפים ד-ו.

ד. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ה(1). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

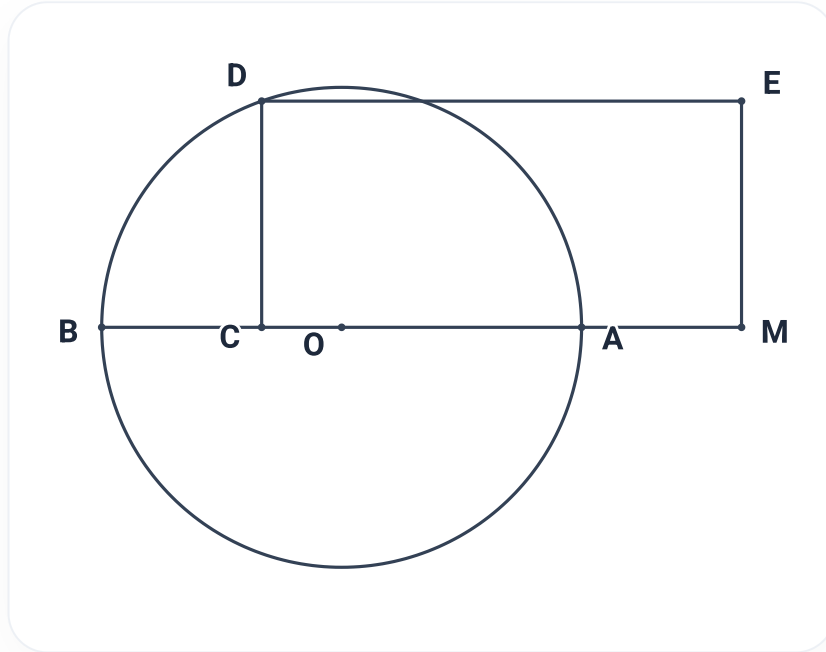
ה(2). סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = (f(x))^2 \cdot f'(x)$. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת בתחום: $0 \leq x \leq \pi$.

1. חשבו את סך השטחים ברביע הראשון המוגבלים על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

שאלה 8 · מלבן בין מעגל לישר מרוחק: מיקום המקסימום כפונקציה של פרמטר

הקטע AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O ורדיוסו R . הנקודה M נמצאת על המשך הקוטר מעבר לנקודה A , כך ש- $AM = d$ ($d > 0$ פרמטר), והישר ℓ מאונך ל- AB בנקודה M . מסמנים על הקוטר נקודה C ועל המעגל נקודה D כך ש- $CD \perp AB$. דרך D מעבירים ישר המקביל ל- AB , והוא חותך את ℓ בנקודה E (ראו סרטוט). נסמן: $AC = x$, $0 < x < 2R$.



א. הביעו באמצעות R ו- d את שטח המלבן $MCDE$.

ב. הביעו באמצעות R ו- d את הערך של x שבעבורו שטח המלבן מקסימלי.

ג. הראו כי לכל $d > 0$, במלבן בעל השטח המקסימלי מתקיים $R < AC < 1.5R$.

ד. נתון כי במלבן בעל השטח המקסימלי $AC = \frac{5}{4}R$. מצאו את d , והביעו באמצעות R את השטח המקסימלי.

כל הברויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math