

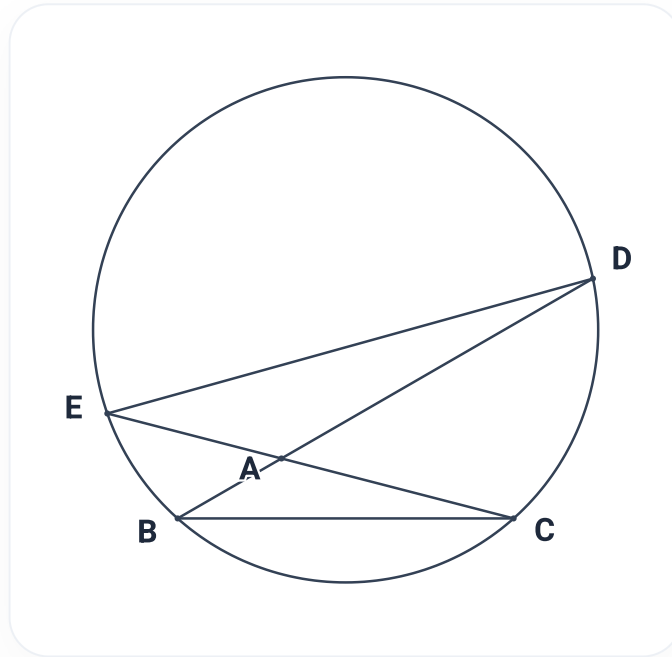
שאלה 1 · שאלות קצרות: אינדוקציה על מספרים אי-זוגיים, מיתרים נחתכים ודמיון, אסימפטוטות של**פונקציית שורש, גרף הפונקציה וגרף הנגזרת**

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקציה או בדרך אחרת שלכל n טבעי אי-זוגי מתקיים:

$$6 + 54 + 150 + \dots + 6n^2 = n(n+1)(n+2)$$

הנקודות B, C, D, E נמצאות על מעגל. המיתרים BD ו-CE נחתכים בנקודה A (ראו סרטוט). נתון: $AE = \frac{3}{4}AC$, $AD = 3AB$.

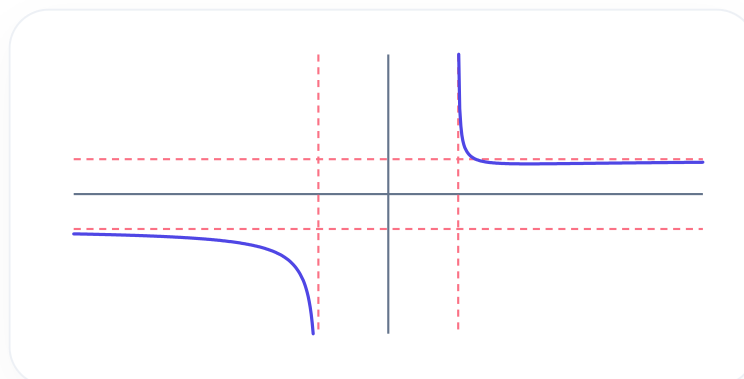


ב(1). הוכיחו: $\triangle AED \sim \triangle ABC$.

ב(2). מצאו את היחס: $\frac{AB}{AC}$.

ב(3). נתון: $\angle DEC = 30^\circ$. האם BE הוא קוטר במעגל הנתון? נמקו את תשובתכם.

לפניכם סרטוט של גרף הפונקציה $f(x)$. לפונקציה $f(x)$ יש שתי אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x ושתי אסימפטוטות מאונכות לציר ה- y . אחד מן הביטויים I-IV שלפניכם מתאר את הפונקציה $f(x)$.



$$\text{I. } \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-4}} \quad \text{II. } \frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}} \quad \text{III. } \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4}} \quad \text{IV. } \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+4}}$$

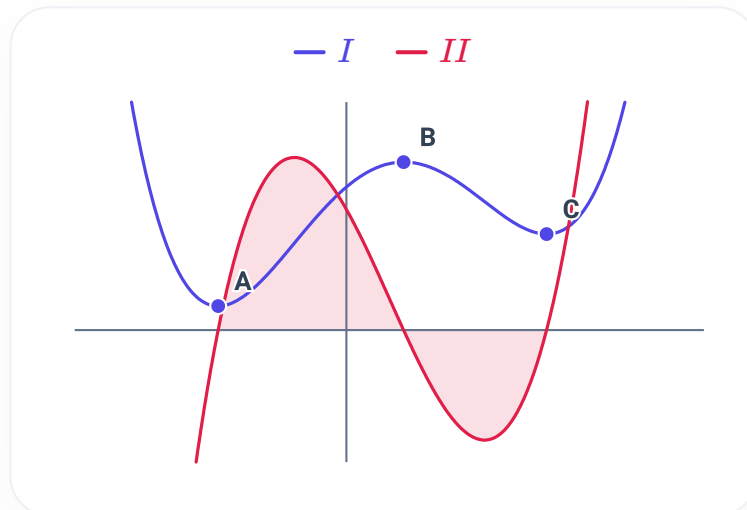
ג(1). קבעו איזה מן הביטויים I-IV מתאר את הפונקציה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.

נתונה הפונקציה $g(x)$, המוגדרת באותו התחום כמו הפונקציה $f(x)$. פונקציית הנגזרת $g'(x)$ מקיימת:

$$g'(x) = f(x) + \frac{7}{3}$$

ג(2). מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

הגרפים I-II בסרטוט שלפניכם מתארים את הפונקציה $f(x)$ ואת פונקציית הנגזרת $f'(x)$. כל נקודות הקיצון של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ מתוארות בסרטוט.



ד(1). קבעו איזה גרף, I או II, מתאר את הפונקציה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.

ד(2). כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$? נמקו את תשובתכם.

הנקודות A, B ו-C הן נקודות הקיצון של גרף I, כמתואר בסרטוט. נתון: $y_A = 1$, $y_B = 7$. השטח המוגבל על ידי גרף II ועל ידי ציר ה- x (השטח המסומן באיור) שווה ל-9.

ד(3). מצאו את שיעור ה- y של הנקודה C.

שאלה 2 · סדרות הנדסיות אינסופיות: סדרת הפרשים $a_{2n-1} - a_{2n}$, התכנסות ומונוטוניות, יחס סכומים**וסכום חלקי**

נתונה סדרה הנדסית אינסופית A , שהאיבר הכללי שלה הוא a_n ומנתה היא q ($q \neq 1$). בונים סדרה חדשה B , שהאיבר הכללי שלה הוא $b_n = a_{2n-1} - a_{2n}$ (כלומר $b_1 = a_1 - a_2$, $b_2 = a_3 - a_4$, וכן הלאה).

א. הוכיחו שגם סדרה B היא סדרה הנדסית.

בנוגע לכל אחד מהיגדים (1)-(2) שלהלן, קבעו אם הוא נכון או לא נכון ונמקו את קביעתכם.

ב(1). אם הסדרה B מתכנסת - בהכרח גם הסדרה A מתכנסת.

ב(2). אם הסדרה B עולה - בהכרח גם הסדרה A עולה.

נתון כי שתי הסדרות מתכנסות, וכי היחס בין הסכום של כל איברי הסדרה B לסכום של כל איברי הסדרה A הוא $\frac{1}{4}$.

ג. מצאו את q .

נתון: $a_1 = 8$, ו- n הוא מספר טבעי המקיים $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = \frac{14896}{3125}$.

ד. מצאו את n .

שאלה 3 · הסתברות עם שני פרמטרים: משאל בבית חולים

בבית חולים גדול נערך משאל בין כל האחיות וכל הרופאים: האם לעבור לשיטת משמרות חדשה. מבין המשתתפים לא היו נמנעים.

מבין המשתתפים שבעד השיטה החדשה, החלק של האחיות הוא r ($0 < r < 1$). מספר האחיות שנגד השיטה שווה למספר הרופאים שבעד השיטה.

נסמן ב- p את ההסתברות שמשתתף שנבחר באקראי בעד השיטה.

א. הביעו באמצעות r ו- p (לפי הצורך) את ההסתברות שאחות שנבחרה באקראי בעד השיטה.

ידוע כי ההסתברות שרופא שנבחר באקראי בעד השיטה גדולה פי 2 מן ההסתברות שאחות שנבחרה באקראי בעד השיטה.

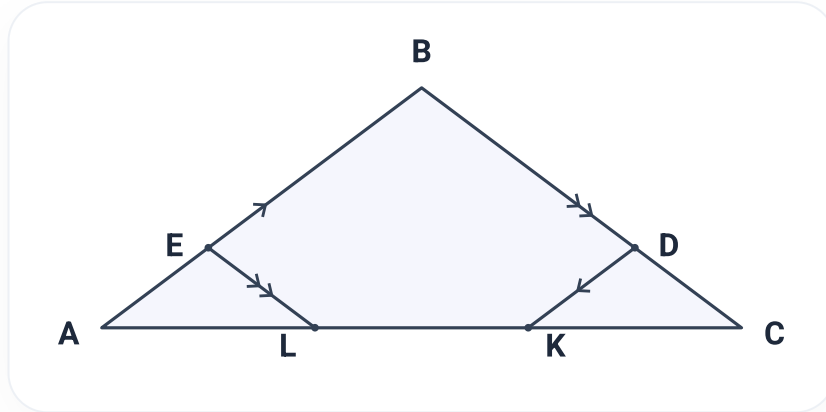
ב. הביעו את p באמצעות r , ומצאו את כל הערכים האפשריים של r .

ג. בוחרים באקראי 2 אחיות. ידוע כי ההסתברות שבדיוק אחת מהן בעד השיטה היא 0.42. מצאו את r ואת p .

ד. בחרו באקראי משתתף שנגד השיטה. מהי ההסתברות שהוא רופא?

שאלה 4 · משולש שווה-שוקיים: מקבילים לשוקיים, דלתון ומרובע בר-חסימה

בציור שלפניכם מתואר משולש שווה-שוקיים ABC , $BA = BC$. הנקודות L ו- K נמצאות על הבסיס AC . דרך הנקודה K העבירו ישר המקביל לשוק BA , והוא חותך את השוק BC בנקודה D . דרך הנקודה L העבירו ישר המקביל לשוק BC , והוא חותך את השוק BA בנקודה E . נתון: $AL = LK = KC$.



א. חשבו את: $\frac{BD}{DC}$.

הקטעים DL ו- EK נפגשים בנקודה G .

ב. הוכיחו כי המרובע $BDGE$ הוא דלתון.

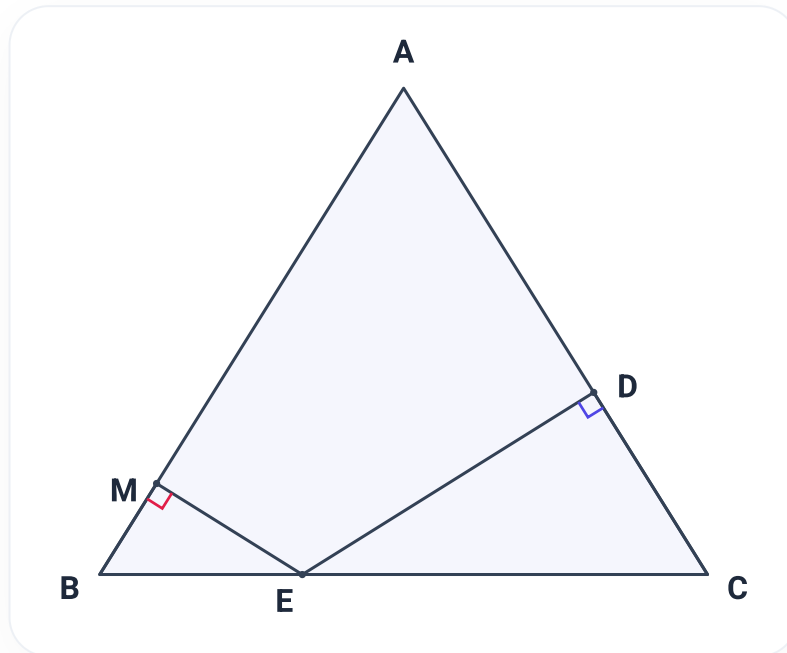
נתון: $AC = 24$. היקף המרובע $EDKL$ הוא 34.

ג. חשבו את אורך הקטע BG .

ד. האם קיימת נקודה F שנמצאת על הישר BG שעבורה המרובע $BDFE$ הוא בר-חסימה במעגל? נמקו את תשובתכם.

שאלה 5 · נקודה נעה על בסיס משולש שווה-שוקיים: סכום קבוע, שטח מינימלי ומספר המעגלים ברדיוס נתון

במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$) אורך הבסיס הוא $BC = 12$. נסמן $\angle ABC = \alpha$. הנקודה E נעה על הבסיס BC (שונה מ- B ומ- C), ונסמן $BE = x$. D ו- M הן עקבי האנכים מ- E לישירים AC ו- AB בהתאמה.



א. הוכיחו כי הסכום $ME + DE$ אינו תלוי ב- x , והביעו אותו באמצעות α .

נתון כי לכל מיקום של E על הבסיס, הנקודות D ו- M נמצאות על השוקיים AC ו- AB (ולא על המשכיהן), וכי הסכום הקטן ביותר האפשרי של שטחי המשולשים BEM ו- CED הוא 14.4.

ב. מצאו את α .

ג. מצאו את כל הערכים של R שבעבורם יש בדיוק שני מיקומים של E על הבסיס שבהם רדיוס המעגל העובר דרך הנקודות A, M, E ו- D שווה ל- R .

שאלה 6 · פונקציית שורש עם פרמטר: אסימפטוטות שונות ב- $\pm\infty$, קיצון בקצה, הגרף של f^4 ושטח

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$, a הוא פרמטר חיובי. ענו על הסעיפים א-ו. הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

ב. הוכיחו כי הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = (f(x))^4$. תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ה(1). מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.



ה(2). קבעו איזה מן הגרפים I-IV שלפניכם מתאר את הפונקציה $g(x)$. נמקו את קביעתכם.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x , ועל ידי הישרים $x = a$ ו- $x = 2a$, הוא 1.75.

ו. מצאו את הערך של a .

שאלה 7 · משפחת הפונקציות $\cos x + \frac{b}{\cos^2 x}$: מספר נקודות הקיצון לפי b ומספר פתרונות

נתונה הפונקציה $f(x) = \cos x + \frac{b}{\cos^2 x}$, בתחום $-\frac{3\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, $x \neq \pm\frac{\pi}{2}$. b הוא פרמטר חיובי.

א. מצאו את $f'(x)$, וקבעו את סוג נקודות הקיצון של $f(x)$ שבהן $x = \pm\pi$.

ב. מצאו את כל ערכי b שבעבורם ל- $f(x)$ יש בדיוק חמש נקודות קיצון.

הציבו $b = \frac{1}{16}$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. מצאו את כל ערכי m שבעבורם למשוואה $f(x) = m$ יש בדיוק שישה פתרונות.

שאלה 8 · נקודת פיתול של פולינום עם פרמטר ובעיית קיצון של סכום שטחים

נתונה הפונקציה: $f(x) = kx^3 - 3x^2 - x + \frac{1}{2}$, המוגדרת לכל x . k הוא פרמטר שונה מ-0.

הנקודה A היא נקודת הפיתול של הפונקציה $f(x)$.

א. הביעו באמצעות k את שיעורי הנקודה A.

נתון כי הנקודה A נמצאת ברביע הראשון.

ב. מצאו את תחום הערכים האפשרי של k .

דרך הנקודה A העבירו אנך לציר ה- x החותך אותו בנקודה B, ואנך לציר ה- y החותך אותו בנקודה C. נתון ריבוע I שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע AB, וריבוע II שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע AC.

ג. מצאו את הערך של k שבעבורו סכום שטחי הריבועים I ו-II הוא מינימלי.

כל הבגריות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math