

מתכונת בגרות - שאלון 571

מבית GOOL בגריות ו-GuyAI

תלמידים ומורים יקרים,

לפניכם מתכונת שנבנתה בדיוק כמו בחינת הבגרות שמחכה לכם: אותו מבנה, אותם פרקים, אותה רמה ואותו ניקוד.

מתכונת מעל רמת בגרות. בערך מחצית מהשאלות קשות יותר ממה שבדרך כלל מופיע בבגרות: יותר שלבים, פחות רמזים, נתונים שדורשים מחשבה. היא נועדה לכיתות חזקות ולתלמידים שמכוונים לציון גבוה. מי שמתאמן מעל הרף מגיע לבגרות עם מרווח ביטחון, והבחינה האמיתית פתאום מרגישה קלה. אל תיבהלו מציון נמוך מהרגיל - זו בדיוק המטרה.

איך היא נולדה?

צוותי המורים של GOOL בגריות ו-GuyAI חיברו כוחות עם כלי הבינה המלאכותית המתקדמים ביותר שיש היום. ניתחנו כל בחינת בגרות בשאלון 571 מהשנים האחרונות: איזה פרק מופיע באיזו שאלה, איך בנויים הסעיפים ואיפה תלמידים נופלים. על הבסיס הזה בנינו מתכונת שנראית, מרגישה ונבחנת בדיוק כמו הבגרות האמיתית - אותו מבנה, אותם פרקים, אותה רמה ואותו ניקוד.

איך היא נבדקה?

כל שאלה עברה בדיקה עיוורת: פותר נוסף, שלא ראה את התשובות, פתר אותה מאפס. שאלה נכנסה למתכונת רק אם התשובה שלו זהה לשלנו, האיור תואם את הנתונים והרמה מתאימה - ובנוסף צוות המורים של GOOL בגריות עובר על המתכונות.

איך להפיק ממנה את המקסימום?

שבו לפתור בתנאי אמת - שעון מול העיניים, בלי ספר ובלי טלפון. פתרו לפי הוראות הבחירה שבראש השאלות, בדיוק כמו בבגרות: חמש שאלות מתוך שמונה. בחרו מראש על אילו שאלות תענו - גם הבחירה היא חלק מהאימון. בסוף בדקו את עצמכם מול דף התשובות הסופיות, ובכל סעיף שבו טעיתם פתחו את הפתרון המלא: שם מוסבר כל צעד, וגם הטעות הנפוצה שכדאי להיזהר ממנה.

טיפ למורים: כיתה הטרוגנית? אפשר לתת את אותו מבנה בשלוש רמות - "בדרך לבגרות" למי שמתחזק, "ברמת בגרות" לרוב הכיתה ו"מעל רמת בגרות" לחזקים. כולם מתאמנים על אותם פרקים, כל אחד ברמה שמקדמת אותו.

לעוד מתכונות, לכל בחינות הבגרות מהשנים הקודמות ולפתרונות מלאים: www.guyai.co.il
בהצלחה בבגרות!

צוותי GOOL בגריות ו-GuyAI

סוג הבחינה: בחינת מתכונת
מועד הבחינה: מתכונת 6, מעל רמת בגרות
מספר השאלון: 035571
שם התלמיד/ה: _____

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות

א.

משך הבחינה: ארבע שעות ועשרים דקות.

ב.

מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון - שאלות קצרות

פרק שני - אינדוקצייה, סדרות והסתברות

פרק שלישי - גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

פרק רביעי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה - 22 נקודות).

סך הנקודות שתוכלו לצבור לא יעלה על 100.

ג.

חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

(2) דפי נוסחאות ל-5 יחידות לימוד.

ד.

הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.

(3) יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה - 22 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון - שאלות קצרות

בפרק זה שאלה 1. אפשר לבחור בה כאחת מחמש השאלות שעליכם לענות עליהן.

1. ענו על שלושה מתוך ארבעת הסעיפים הבאים:

א. לפניכם טענה:

אם ל- n טבעי מסוים $8^n + k$ מתחלק ב-7 ללא שארית, אז גם $8^{n+1} + k$ מתחלק ב-7 ללא שארית (k מספר שלם).

(1) הוכיחו שהטענה נכונה לכל מספר שלם k .

(2) מצאו את כל ערכי k בתחום $0 \leq k \leq 20$ שעבורם $8^n + k$ מתחלק ב-7 לכל n טבעי.

ב. (1) נתונה פונקציה f הגזירה לכל x , ופונקציית הנגזרת שלה f' זוגית. האם f בהכרח אי-זוגית? הוכיחו או הציגו דוגמה נגדית.

(2) נתונה פונקציה f הגזירה לכל x , ופונקציית הנגזרת שלה f' אי-זוגית. האם f בהכרח זוגית? הוכיחו או הציגו דוגמה נגדית.

ג. נתונה הפונקציה $f(x) = (x+1)(x-1)(x-3)$ בתחום $-1 \leq x \leq 4$. נגדיר $F(a) = \int_{-1}^a f(x) dx$, $-1 < a \leq 4$.

(1) הביעו את $F(a)$ באמצעות a , ומצאו את כל ערכי a בתחום שעבורם $F(a) = 0$.

(2) מצאו את הערך הגדול ביותר של $F(a)$ בתחום $-1 < a \leq 4$, ואת a שבו הוא מתקבל.

ד. נתונה סדרה חשבונית $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$ שהפרשה $d \neq 0$.

(1) מצאו את כל ערכי k ($1 \leq k \leq 2n+1$) שעבורם a_1, a_k, a_{2n+1} (בסדר הזה) הם שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית.

(2) האם ייתכן ש- a_1, a_{n+1}, a_{2n+1} הם גם שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית? נמקו.

פרק שני - אינדוקצייה, סדרות והסתברות

בפרק זה השאלות 2-3. בחרו מהן שאלות כרצונכם - בסך הכול חמש שאלות מכל השאלון.

2. נתונות שתי סדרות הנדסיות אינסופיות מתכנסות A ו-B, שכל איבריהן שונים מ-0, עם מנות q_A ו-

q_B בהתאמה. הסדרה $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots$ היא סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת. אף אחת משלוש הסדרות אינה קבועה.

$$\text{נתון: } \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots}$$

א. מצאו משוואה שמקשרת בין q_A ל- q_B .

ב. מצאו את כל הערכים של q_A שבעבורם קיימות סדרות כאלה, ולכל ערך כזה קבעו כמה ערכים אפשריים יש ל- q_B .

ג. נתון בנוסף כי הסדרה B עולה.

הביעו את q_B באמצעות q_A .

ד. נתון כי מנת הסדרה $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots$ היא $-\frac{2}{3}$. מצאו את q_A ואת q_B .

3. נתון לוח משחק מלבני שאורכי צלעותיו 20 ס"מ ו-10 ס"מ.

על הלוח מסורטטים עיגול ומשולש.

העיגול משיק לשלוש צלעות של המלבן, ואורך הרדיוס שלו 5

ס"מ. AB הוא קוטר של העיגול, ו- B היא נקודת

ההשקה של העיגול עם הצלע הקצרה של המלבן. צלע אחת של

המשולש מתלכדת עם הצלע הקצרה השנייה של המלבן,

והקודקוד השלישי של המשולש הוא A .

מטילים חרוז קטן מאוד על הלוח (החרוז תמיד פוגע בלוח).

א. מהי ההסתברות שהחרוז יפגע בנקודה שהיא מחוץ לעיגול ומחוץ למשולש?

ב. מטילים את החרוז 4 פעמים בזו אחר זו. מהי ההסתברות שהוא יפגע: בפעם הראשונה

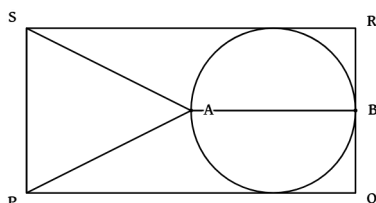
במשולש, בפעם השנייה ובפעם השלישית בעיגול, ובפעם הרביעית מחוץ לשתי הצורות?

ג. מטילים את החרוז 5 פעמים.

(1) מהי ההסתברות שברוב הפעמים החרוז פגע במשולש?

(2) ידוע שברוב הפעמים החרוז פגע במשולש. מהי ההסתברות שבפעם האחרונה הוא פגע

במשולש?



פרק שלישי - גאומטריה וטריגונומטריה במישור

בפרק זה השאלות 4-5. בחרו מהן שאלות כרצונכם - בסך הכול חמש שאלות מכל השאלון.

4. במשולש ABC נתון $\angle ACB = 60^\circ$. נסמן:

$$BC = b, AC = a$$

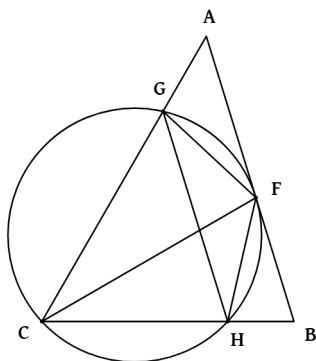
מעגל עובר דרך הקודקוד C , חותך את הצלעות AC ו- BC בנקודות G ו- H בהתאמה, ומשיק לצלע AB בנקודה F . נתון: $GH \parallel AB$.

א. הוכיחו: $\frac{AF}{FB} = \frac{a}{b}$.

ב. הביעו באמצעות a ו- b את היחס $\frac{GH}{AB}$.

ג. הוכיחו שבכל משולש כזה $GH \leq \frac{3}{4}AB$. באיזה משולש מתקבל שוויון?

ד. נתון: $AB = 7$, $\frac{GH}{AB} = \frac{120}{169}$, $AC > BC$. מצאו את AC , את BC ואת רדיוס המעגל.



5. בסרטוט שלפניכם דלתון ABCD

$$(AB = AD, CB = CD)$$

נתון: $\angle CDB = 2\alpha$, $\angle ADB = \alpha$,

$$0^\circ < \alpha < 45^\circ$$

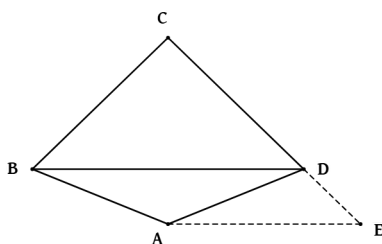
נסמן: $AB = k$.

א. הביעו באמצעות k ו- α את רדיוס המעגל החוסם את המשולש CDB.

ב. נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD גדול פי $\frac{6}{5}$ מרדיוס המעגל החוסם את המשולש CDB.

מצאו את גודל הזווית BAD.

ג. הנקודה O היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABD. דרך הנקודה A העבירו ישר המקביל ל-BD וחיתך את המשך הצלע CD בנקודה E. נתון כי שטח המשולש AOE הוא 44. מצאו את הערך של k .



פרק רביעי - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

בפרק זה השאלות 6-8. בחרו מהן שאלות כרצונכם - בסך הכול חמש שאלות מכל השאלון.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}$, כאשר $a > 0$ הוא פרמטר.

א. הוכיחו שלכל $a > 0$ הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה, ומצאו את האסימפטוטות שלה המקבילות לצירים.

ב. מצאו באמצעות a את כל ערכי m שבעבורם הישר $y = mx$ חותך את גרף הפונקציה בשלוש נקודות בדיוק.

ג. נתון $a = 5$. מצאו את m שבעבורו הישר $y = mx$ חותך את הגרף בנקודה שבה $x = 2$, וחשבו את השטח הכולל המוגבל בין הגרף לבין הישר.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sin(x) + \sin(x) \cos^2(x)}{1 - \cos^2(x)}$, בתחום $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$, המאונכות לציר ה- x .

(3) האם הפונקציה f זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? הוכיחו את תשובתכם.

ב. ענו על סעיפים (1)-(2) שלהלן עבור התחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

(1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ (בתחום $-2\pi \leq x \leq 2\pi$).

ד. הוכיחו כי לפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

ה. חשבו את השטח הכלוא בין גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ובין ציר ה- x , בתחום

$$2 \leq x \leq 2.6.$$

8. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-a}}{x^2}$, $a > 0$ הוא פרמטר. נתונה גם הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)$, קבעו אם היא זוגית או אי-זוגית, ומצאו את משוואות האסימפטוטות שלה המאונכות לצירים.

ב. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של $f(x)$ (כולל בקצוות התחום) וקבעו את סוגן.

ג. מצאו, לכל ערך של a , את מספר נקודות המפגש של הגרפים של $f(x)$ ושל $g(x)$.

ד. עבור הערך של a שבעבורו יש לגרפים בדיוק שתי נקודות מפגש, מצאו את שיעורי נקודות המפגש, והראו שבכל אחת מהן יש לגרפים משיק משותף. מה משוואתו?

עוד מתכונות, בגרורות ופתרונות מלאים: www.guyai.co.il