

שאלה 1 · שאלות קצרות: אינדוקציה, זהות טריגונומטרית, הסתברות גאומטרית ואסימפטוטות

שאלה זו בנויה מארבעה סעיפים א-ד שאינם תלויים זה בזה. בבחינה עונים על שלושה מהם.

בסדרה מתקיים: $a_{n+1} = a_n + 3n + 3n^2$.

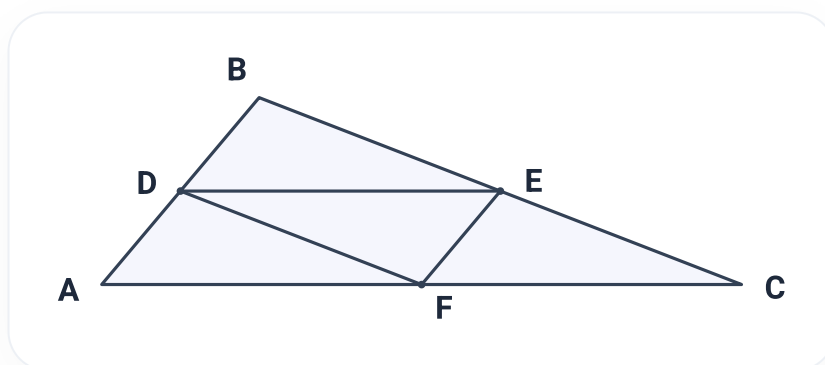
א(1). הוכח: אם ידוע כי עבור k טבעי מסוים מתקיים: $a_k = k^3 - k + 2$, אז $a_{k+1} = (k+1)^3 - (k+1) + 2$.

א(2). האם מתשובתך לסעיף א(1) נובע שלכל n טבעי בסדרה, בהכרח מתקיים: $a_n = n^3 - n + 2$? נמק.

ב. בדוק נכונות / אי נכונות הטענה הבאה. אם הטענה נכונה - הוכח אותה, אם לא הצג דוגמה נגדית.

אם זוויות α ו- β של משולש מקיימות את השוויון $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$ אז המשולש הוא שווה שוקיים.

במשחק מחשב בכל שלב במשחק מופיעה דמות במקום אקראי על גבי משטח משולש. המשולש מחולק על ידי שלושת קטעי האמצעים ל-4 משולשים (D, E, F הם אמצעי הצלעות AB, BC, AC בהתאמה, כמתואר בסרטוט).



ג. מהי ההסתברות שהדמות מופיעה בתוך המקבילית $DFCE$?

ד. לפניך שלוש פונקציות:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x+1)(x+2)} ; \quad g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4} ; \quad h(x) = \frac{x^3 - 1}{(x-2)(x+1)}$$

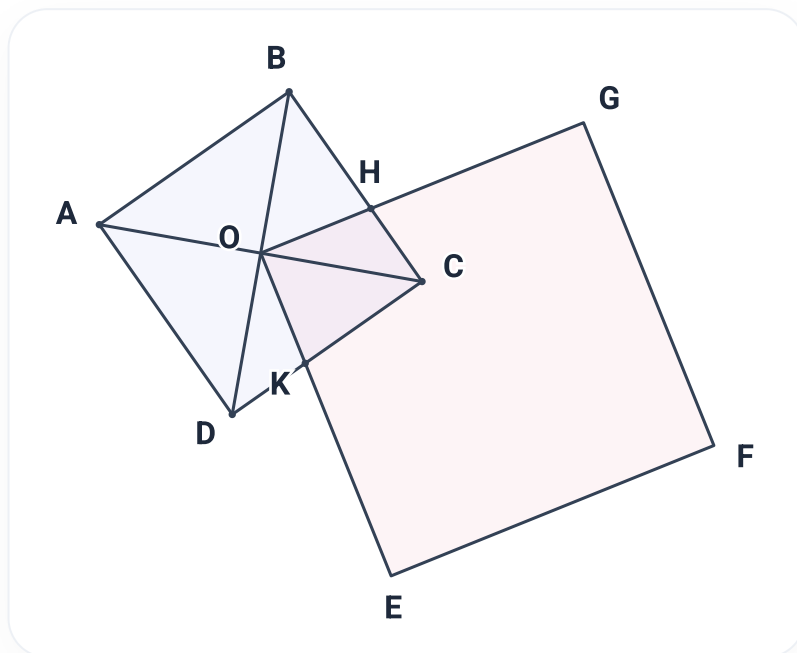
לאיזו מהן התכונה הבאה:

לפונקציה יש שתי נקודות אי הגדרה, אסימפטוטה אופקית אחת ואסימפטוטה אנכית אחת.

נמק בחירתך על ידי הסבר להתאמה ועל ידי פסילת האחרות.

שאלה 2 · שני ריבועים עם קודקוד משותף במרכז: חפיפה, יחס שטחים ומרובע בר-חסימה

אלכסוני הריבוע $ABCD$ נפגשים בנקודה O . הנקודה O היא קודקוד הריבוע $OEHG$ ששתיים מצלעותיו חותכות את צלעות הריבוע $ABCD$ בנקודות H ו- K כמתואר בסרטוט.



א. הוכח כי $\triangle OKD \cong \triangle OHC$.

ב. מהו היחס בין שטח הריבוע $ABCD$ לשטח המרובע OHC ?

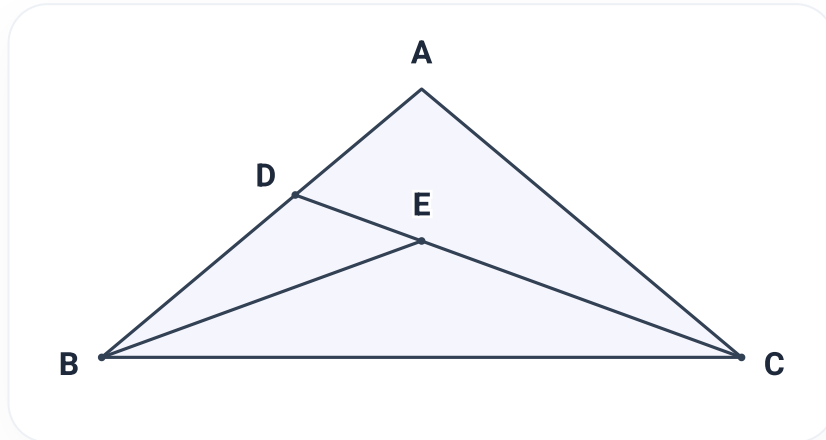
ג. הוכח כי את המרובע OHC ניתן לחסום במעגל.

ד. שטח הריבוע $ABCD$ הוא 64, $CH = 2$.

מצא את רדיוס המעגל החוסם את המרובע OHC .

שאלה 3 · משולש שווה-שוקיים ומפגש חוצי הזווית: זווית, יחס רדיוסים ואורך

במשולש שווה-שוקיים ABC ($AC = AB$) זווית הבסיס היא 2α . הנקודה E היא מפגש חוצי-הזווית במשולש ABC . המשך CE חותך את הצלע AB בנקודה D (ראה ציור). נתון: $\angle BAC > 90^\circ$, $\frac{EC}{DE} = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \alpha}$.



א. מצא את α .

ב. מצא את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC ובין רדיוס המעגל החסום במשולש ABC .

ג. נתון כי ההפרש בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC ובין רדיוס המעגל החסום במשולש ABC הוא 2 ס"מ.

מצא את אורך הקטע AE .

שאלה 4 · ברנולי: מציאת p מיחס הסתברויות, "רוב" והסתברות מותנית

במחנה הקיץ של הצופים, חלק מהחניכים חובשים כובעים אדומים. אם בוחרים באקראי 6 חניכים ההסתברות שבדיוק 3 מהם חובשים כובעים אדומים מהווה $\frac{8}{9}$ מההסתברות שבדיוק שניים מהם חובשים כובעים אדומים.

א. בוחרים באקראי חניך. מהי ההסתברות שהוא חובש כובע אדום?

נבחרו באקראי 6 חניכים.

ב(1). מהי ההסתברות שרוב החניכים שנבחרו אינם חובשים כובעים אדומים?

ב(2). מהי ההסתברות שהחניך שנבחר שני חובש כובע אדום, אם ידוע שרוב החניכים שנבחרו אינם חובשים כובעים אדומים?

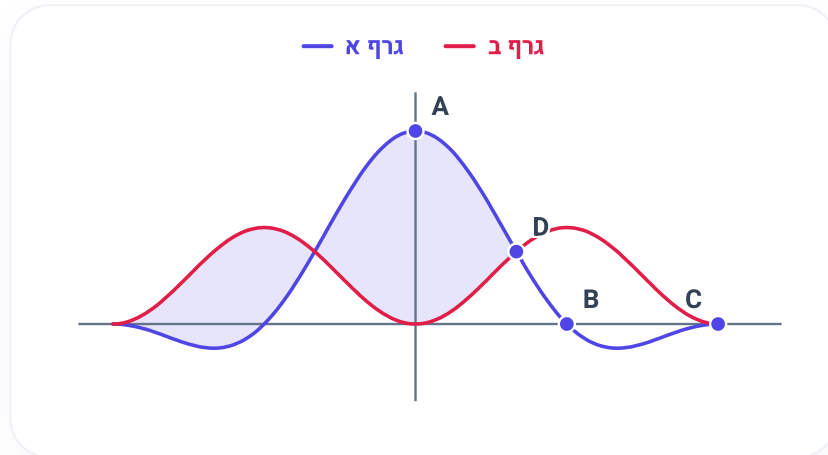
ב(3). מהי ההסתברות שרוב החניכים שנבחרו אינם חובשים כובעים אדומים, אם ידוע שהחניך הראשון שנבחר חובש כובע אדום?

שאלה 5 · פונקציות טריגונומטריות: זוגיות, זיהוי גרפים, פרמטר ושטח בין גרפים

נתונות הפונקציות: $f(x) = \sin^2 x - \sin x$, $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

א. קבע עבור כל אחת מהפונקציות: האם היא זוגית? אי-זוגית? אחרת? נמק קביעותיך.

בסרטוט שלפניך שני גרפים. אחד מתאים לפונקציה $g(x)$ והשני מתאים לאחת מהפונקציות: $h(x) = a \cdot \sin^2 x$ או $k(x) = a \cdot \cos^2 x$.



ב(1). קבע איזה גרף מתאים לפונקציה $g(x)$ ולאילו פונקציה $h(x)$ או $k(x)$ מתאים הגרף השני. נמק קביעותיך.

ב(2). ידוע כי שיעורי הנקודה D , נקודת החיתוך בין שני הגרפים, הקרובה ביותר לציר ה- y מימינו, הם: $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3}{4}\right)$. מצא את הערך של הפרמטר a .

ב(3). מצא את שיעורי הנקודות A, B, C שבסרטוט (נקודות חיתוך עם הצירים של גרף א בתחום $0 \leq x \leq \pi$).

ג. חשב את גודל השטח המסומן בסרטוט. פרט שיקוליך.

שאלה 6 · סדרה חשבונית עם מספר אי-זוגי של איברים: האיבר האמצעי וסכומי המקומות הזוגיים והאי-**זוגיים**

נתונה סדרה חשבונית $a_1, a_2, \dots, a_{2n+3}$ ובה $2n+3$ איברים (n הוא מספר טבעי).
סכום הסדרה גדול פי 43 מן האיבר האמצעי. האיבר האמצעי שונה מ-0.

א(1). הראה כי סכום הסדרה שווה ל- $(2n+3) \cdot a_{n+2}$.

א(2). מצא את מספר האיברים בסדרה.

ידוע כי בסדרה הנתונה סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים גדול ב-40 מסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

ב(1). מצא את האיבר האמצעי.

ב(2). מצא את סכום הסדרה.

נתון כי הפרש הסדרה הנתונה הוא $-a_1$.

ג. קבע אם הסדרה עולה או יורדת.

שאלה 7 · פונקציה רציונלית עם פרמטר: חקירה, סקיצה ונפח גוף סיבוב

נתונה הפונקציה $h(x) = ax^3 - 1$.

א. היעזר בפונקציה $y = x^3$ וסרטט סקיצה לגרף הפונקציה $h(x)$ עבור: $a > 0$ ועבור $a < 0$.

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{ax^3-1}$, $a > 0$.

ענה על סעיף ב. אם יש צורך הבע בעזרת a .

ב(1). מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ב(2). כתוב את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים.

ב(3). מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ב(4). סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. נתון $a = 1$. מהו נפח גוף הסיבוב הנוצר מסיבוב סביב ציר ה- x של השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, ציר ה- x ועל ידי האנך לציר ה- x בנקודת הקיצון של הפונקציה?

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math