

שאלה 1 · שאלות קצרות: סדרה טריגונומטרית, זיהוי f, f', f'' , כלל נסיגה וזוגיות

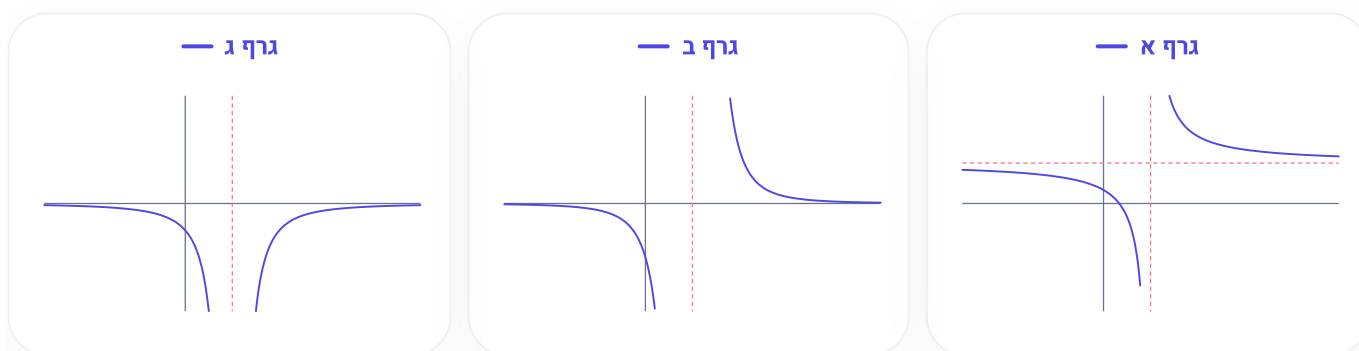
פרק ראשון: ענה על שלושה מארבעת הסעיפים בשאלה 1.

א. נתונה הסדרה: $a_n = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{6}\right)$, n טבעי.

א(1). רשום שלושה איברים ראשונים בסדרה.

א(2). מצא את הסכום של 2019 האיברים הראשונים בסדרה.

ב. לפניכם שלושה גרפים. הגרפים מתאימים לפונקציה $f(x)$ ולשתי הנגזרות הראשונות שלה: $f'(x)$, $f''(x)$. לשלוש הפונקציות תחום הגדרה זהה.



ב. איזה גרף מתאים לכל אחת מהן? נמק טענתך.

ג. נתונות שתי סדרות: $a_n = n^2 + 2n$, $b_{n+1} = b_n + 2n + 3$ ו- $b_1 = 3$.

ג(1). הראה כי $a_1 = b_1$. האם $a_2 = b_2$? האם $a_4 = b_4$?

ג(2). האם הסדרות זהות? אם לא, תן דוגמה. אם כן, הוכח כי לכל n טבעי מתקיים $a_n = b_n$.

ד. נתון כי $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

אלו מהפונקציות הבאות הן בהכרח זוגיות? נמק את קביעותיך.

ד(1). $g(x) = f(x) + 1$

ד(2). $h(x) = f(x + 1)$

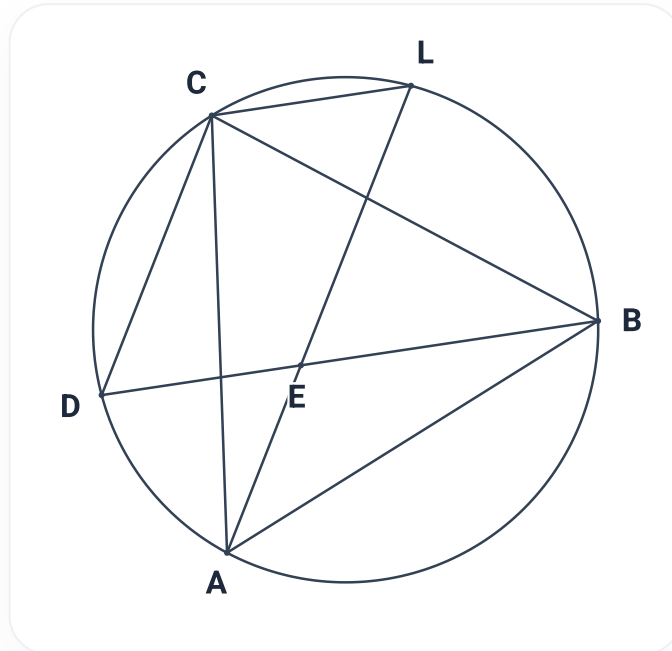
ד(3). $k(x) = \sqrt{f(x)}$

שאלה 2 · משולש שווה צלעות חסום במעגל: מיתרים מקבילים, מקבילית ומשולש שווה צלעות

משולש שווה צלעות ABC חסום במעגל.

נקודות D ו- L נמצאות על המעגל כך ש- $BD \parallel LC$.

המיתרים AL ו- BD נחתכים בנקודה E (ראה ציור).



א. הוכח כי המרובע $LEDC$ הוא מקבילית.

ב. אילו מן התוצאות שלהלן ניתן להסיק בוודאות מהנתונים:

ב(1). המשולש ADE שווה צלעות.

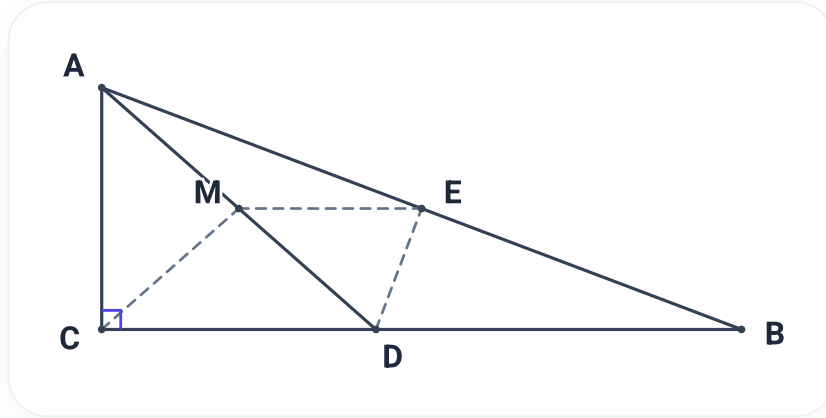
ב(2). המשולש CDE שווה צלעות.

ב(3). המשולש BCD הוא ישר זווית.

ג. מה ניתן יהיה לומר על הנקודה E , אם BD הוא קוטר? נמק.

שאלה 3 · משולש ישר זווית, תיכון ליתר וקטע אמצעים: מרובע בר חסימה ומרובע חוסם

משולש ABC הוא ישר זווית: $\angle C = 90^\circ$. הנקודה E היא אמצע הצלע AB . הנקודה D נמצאת על הצלע BC כך ש- $AD = DB$. נסמן: $DB = 4x$. נתון גם: $\frac{CD}{DB} = \frac{3}{4}$, הנקודה M היא אמצע הקטע AD .



- א. הוכח: $ME = CM$.
- ב. חשב את הגודל של הזוויות ABC ו- ADC .
- ג. בדוק נכונות/אי נכונות הטענות הבאות. נמק.
- ג(1). המרובע $ACDE$ הוא בר חסימה במעגל.
- ג(2). במרובע $CMED$ ניתן לחסום מעגל.
- ד. שטח המשולש ACB הוא $\frac{63\sqrt{7}}{8}$ סמ"ר. חשב את אורך הצלע DB ואת שטח המשולש ADB .

שאלה 4 · בדיקה רפואית למחלה נדירה: הסתברות מותנית הפוכה וניסויים חוזרים

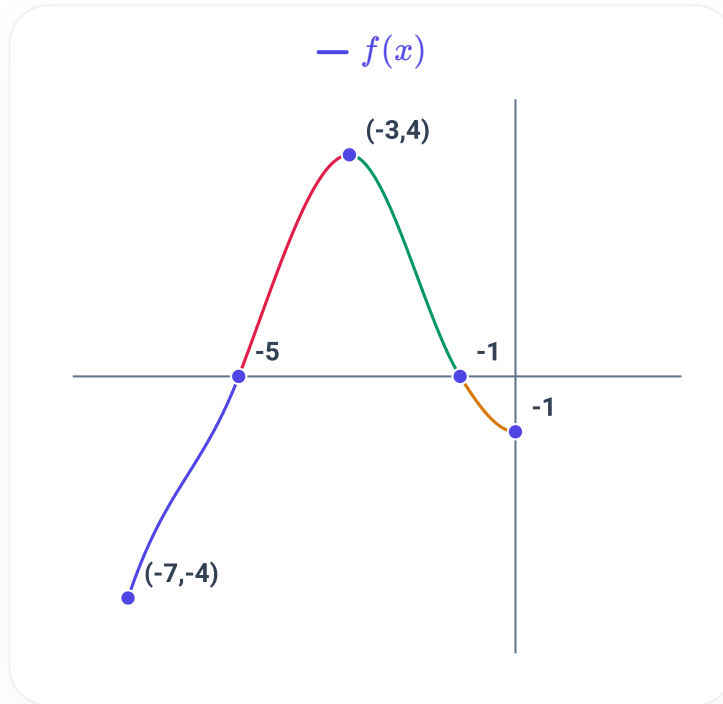
- בדיקה רפואית גילתה אצל אדם סימנים למחלה נדירה שקיימת רק אצל אחד מכל אלף אנשים. הבדיקה, כמו בדיקות רפואיות רבות, אינה אמינה לחלוטין: היא מאתרת נכון 98% מהחולים ו- 96% מהבריאים. כלומר, היא מחטיאה 2% מהחולים וממיינת, בטעות, 4% מהבריאים כחולים.
- א. לאור הידיעה על כך שהמחלה נדירה ושהאמינות של הבדיקה אינה מושלמת, מה ההסתברות שאדם שנבדק בבדיקה ואובחן כחולה, אכן חולה?
 - ב. אנשים עלו במדגם של מחקר רפואי ועברו את הבדיקה:
 - ב(1). מה ההסתברות, ללא קשר לבדיקה, שכל 5 הנבדקים בריאים?
 - ב(2). מה ההסתברות שכל 5 הנבדקים יאובחנו כבריאים בבדיקה הנ"ל?
 - ג. כיצד תשתנה תשובתך לסעיף א אם ידוע שהאדם שעבר את הבדיקה שייך לאוכלוסייה שבה המחלה אינה קיימת כלל?

שאלה 5 · פונקציה זוגית נתונה בגרף: $\frac{1}{f}$, פונקציה ש- $f' = -g$, קעירות ושטח מתחת ל- g''

הפונקציה $f(x)$ זוגית ומוגדרת לכל x .

לפניך הגרף של $f(x)$ בתחום: $-7 < x < 0$.

בגרף מסומנים: נקודות החיתוך עם ציר ה- x ב- $x = -5$ וב- $x = -1$, נקודת המקסימום $(-3, 4)$, הנקודה $(-7, -4)$, ו- $f(-7) = -4$.



א. סרטט את הגרף של הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ בתחום $-7 < x < 7$ ורשום את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ בתחום זה ואת האסימפטוטות המקבילות לצירים (אם הן קיימות).

עבור הסעיפים הבאים ידוע בנוסף כי עבור פונקציה נוספת $g(x)$ מתקיים:
 $-f(x) = g'(x)$

ב. סרטט את הגרף השלם של הפונקציה $g'(x)$. פרט בקצרה שיקולך.

ג. היעזר בנתונים שבסרטוט, רשום את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבע את סוגן. נמק בקצרה.

ד. היעזר בנתונים שבסרטוט ורשום את תחומי הקעירות כלפי מעלה של $g(x)$. נמק בקצרה.

ה. סרטט גרף עבור $g''(x)$ (הנגזרת השנייה של $g(x)$). נמק בקצרה.

ו. מהו גודל השטח הכלוא בין הגרף של $g''(x)$ לבין ציר ה- x ברביע השלישי (בתחום $-7 < x < 7$)? נמק.

שאלה 6 · פונקציות טריגונומטריות עם שורש במכנה: חקירה, הזהה ושיקוף, ואינטגרל של פונקציה אי-זוגית

$$. g(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}, f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \text{ נתונות הפונקציות}$$

ענה על סעיף א עבור התחום: $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

א(1). מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצא את המשוואות של האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה- x .

א(3). מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

א(4). סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ענה גם על סעיף ב עבור תחום: $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

ב(1). מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ב(2). הוכח: $g(x) = -f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

ב(3). סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. מצא את ערך הביטוי $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$. נמק את תשובתך.

שאלה 7 · סדרה הנדסית שבה $a_3 \cdot a_7 = 1$: איבר אמצעי, איברים הפוכים ומכפלת איברים

a_n היא סדרה הנדסית אין-סופית שהמנה שלה היא q . $|q| \neq 1$.

נתון: $a_3 \cdot a_7 = 1$.

א. חשב את a_5 (מצא את שתי האפשרויות).

נתון $a_5 > 0$.

ב(1). הבע את a_1 באמצעות q .

ב(2). האם קיים n טבעי שעבורו $a_n = \frac{1}{a_1}$? אם כן - מצא אותו. אם לא - נמק.

ב(3). האם קיים n טבעי שעבורו $a_n = \frac{1}{a_{13}}$? אם כן - מצא אותו. אם לא - נמק.

ג(1). הבע באמצעות q את 7 האיברים הראשונים של הסדרה a_n .

ג(2). נתון: $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k = 1$ (k הוא מספר טבעי). מצא את הערך של k והסבר מדוע הוא הערך האפשרי היחיד של k .

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math