

שאלה 1 · פרק ראשון: משולש חסום, פולינום מונוטוני, גרף הנגזרת וסדרה הנדסית הפוכה

ענה על שלושה מארבעת הסעיפים בשאלה 1.

משולש חסום במעגל שאורך הרדיוס שלו 6 ס"מ. אורך אחת הצלעות של המשולש: 4 ס"מ.

א(1). כמה משולשים כאלה יש?

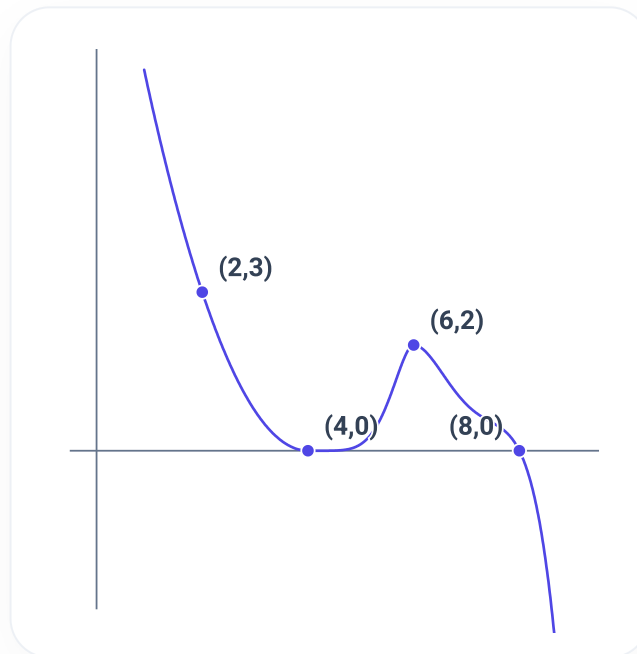
א(2). מצא את אורך השוק במשולש שווה שוקיים שמקיים את התנאים הנ"ל. הבחן בין שני מקרים.

נתונה הפונקציה $f(x) = x^5 + 3x + 1$.

ב(1). מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם קיימים)? הוכח קביעתך.

ב(2). הסתמך על תשובתך, וקבע כמה פעמים חותך גרף הפונקציה את ציר ה- x . נמק קביעתך.

הגרף המצורף מתאר את גרף הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$ בתחום $0 < x < 9$. נתון: $f(2) = -3$, $f(4) = -1$, $f(6) = 0$, $f(8) = 2$.



ג(1). האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון? אם כן - רשום את שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן. נמק.

ג(2). האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות פיתול? אם כן - רשום את שיעורי נקודות הפיתול ואת משוואות המשיקים העוברים דרכן.

נתונה סדרה הנדסית אינסופית, שאיבריה הם: $a_1, a_2, a_3, \dots$. כל האיברים בסדרה שונים מ-0. מגדירים סדרה חדשה בה מתקיים: $b_n = \frac{1}{a_n}$ לכל n טבעי.

ד(1). הוכח כי גם הסדרה החדשה היא סדרה הנדסית.

ד(2). האם ייתכן כי שתי הסדרות הן סדרות אינסופיות מתכנסות? הסבר תשובתך.

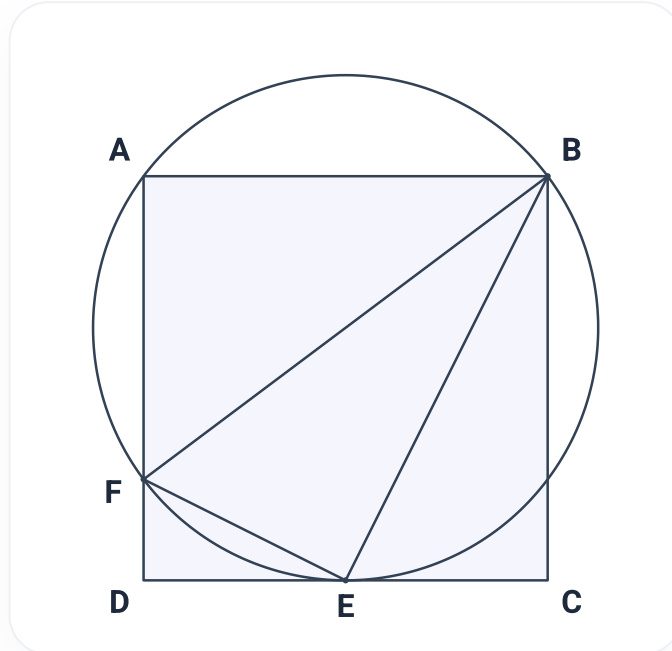
שאלה 2 · ריבוע ומעגל: משיק, קוטר ודמיון משולשים

נתון ריבוע $ABCD$ ונתון מעגל.

הקדקודים A ו- B של הריבוע נמצאים על המעגל.

הצלע DC משיקה למעגל בנקודה E .

הצלע AD חותכת את המעגל בנקודה F (ראה ציור).



א. הוכח $\triangle EDF \sim \triangle BEF$.

ב. נתון: האורך של רדיוס המעגל הוא 5 ס"מ, $FD = 2$ ס"מ. חשב את האורך של EF .

ג. חשב את האורך של צלע הריבוע הנתון.

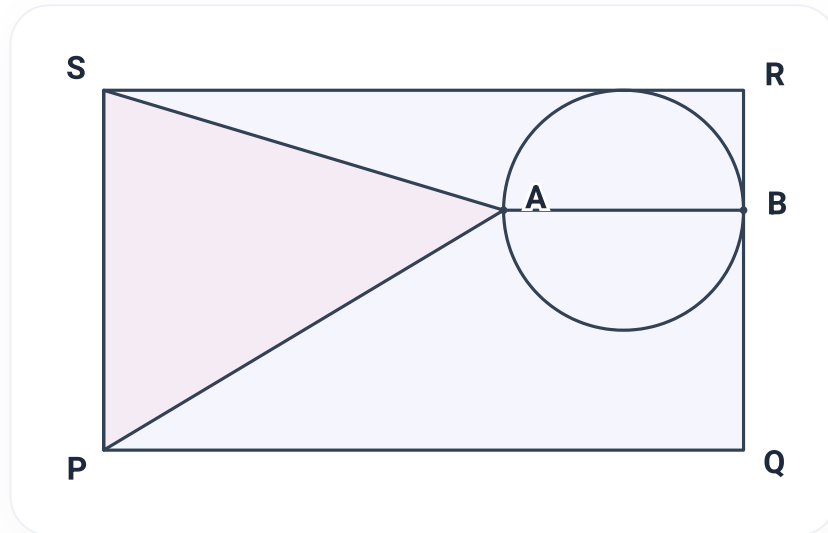
שאלה 3 · לוח משחק: הסתברות כיחס שטחים וניסויים חוזרים

נתון לוח המשחק הבא:

הלוח מלבני, אורכי צלעותיו: 16 ס"מ ו-9 ס"מ.

על הלוח מסורטטים עיגול, ומשולש.

העיגול משיק לשתי צלעות של המלבן, ואורך הרדיוס שלו 3 ס"מ. צלע אחת של המשולש מתלכדת עם הצלע הקצרה של המלבן והקודקוד השלישי של המשולש נמצא בקצה הקוטר AB של המעגל. הנקודה B היא נקודת ההשקה של העיגול עם הצלע הקצרה של המלבן. מטילים חרוז קטן מאד על הלוח. (החרוז תמיד פוגע בלוח).



א. מהי ההסתברות שהחרוז יפגע בנקודה שהיא מחוץ לעיגול ומחוץ למשולש?

ב. מטילים את החרוז 4 פעמים בזו אחר זו. מהי ההסתברות שהוא יפגע: בפעם הראשונה ובפעם האחרונה בעיגול, בפעם השנייה במשולש ובפעם השלישית במשולש?

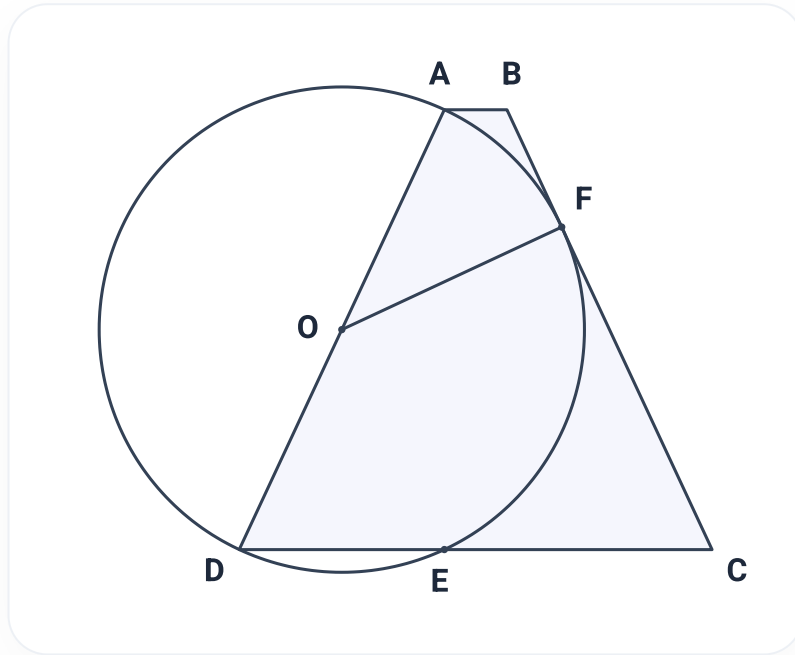
מטילים את החרוז 6 פעמים.

ג(1). מהי ההסתברות שברוב הפעמים הוא פגע בעיגול?

ג(2). ידוע שברוב הפעמים החרוז פגע בעיגול, מהי ההסתברות שהוא פגע בעיגול בפעם הראשונה?

שאלה 4 · טרפז שווה שוקיים ומעגל על שוק כקוטר: זוויות יחס קטעים

נתון טרפז שווה שוקיים $ABCD$ ($AD = BC$).
 השוק AD היא קוטר במעגל שמרכזו O .
 השוק BC משיקה למעגל בנקודה F .
 המעגל חותך את הבסיס DC בנקודה E (ראה ציור).
 נתון: $\angle BCD = \alpha$.



א. הבע באמצעות α את גודל הזווית FOD .

ב(1). הבע באמצעות α את גודל הזווית ODF .

ב(2). הבע באמצעות α את היחס $\frac{DE}{DC}$.

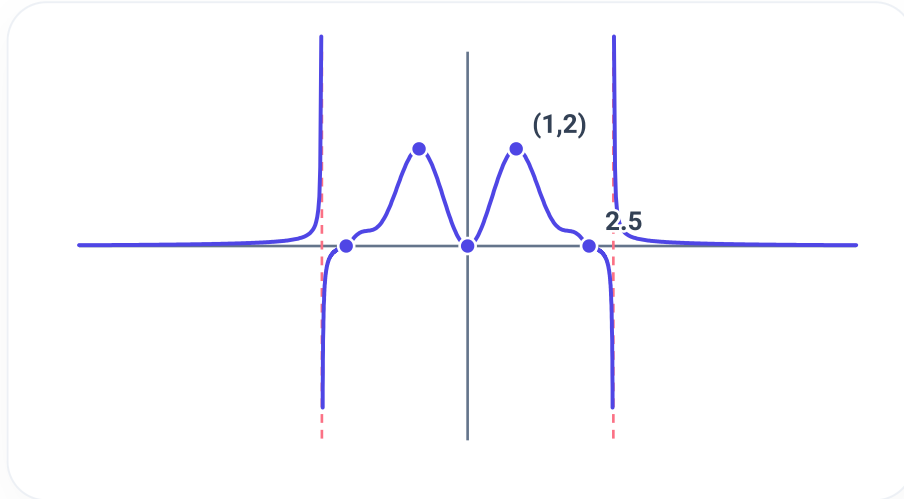
שאלה 5 · תכונות f מגרף הנגזרת: מונוטוניות, קיצון, פיתול, משיקים ואינטגרל של f''

בסרטוט שלפניך מוצג גרף הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$.

הגרף סימטרי ביחס לציר ה- y .

הישר $x = 3$ הוא אסימפטוטה אנכית לגרף הפונקציה.

לפונקציה $f(x)$ ולנגזרתה יש תחום הגדרה זהה.



א. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$? נמק.

ב. מהם שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$? ציין את סוגן.

ג. כמה נקודות פיתול יש לפונקציה? רשום את שיעורי ה- x שלהן.

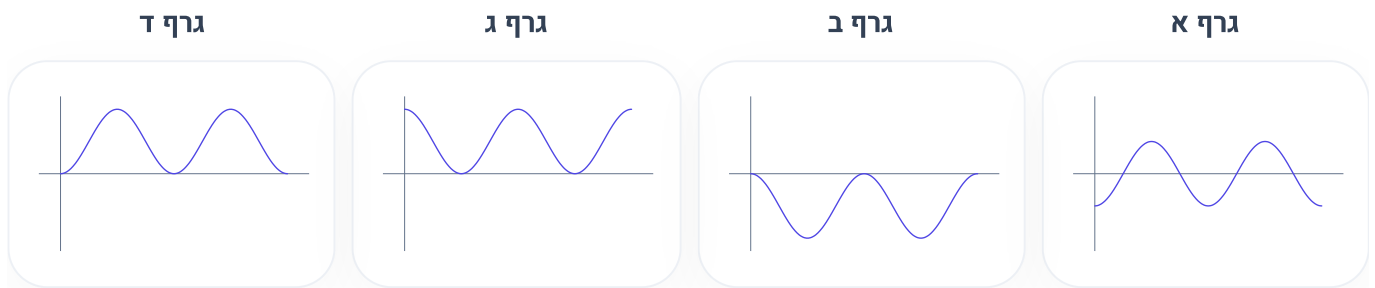
ד. נתון: $f(1) = 1$. מהי משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $(1, 1)$?

ה. ידוע כי $f(x)$ היא פונקציה אי זוגית. מהי משוואת המשיק ל- $f(x)$ בנקודה בה $x = 0$?

ו. חשב את הערך של האינטגרל הבא: $\int_{-2.5}^1 f''(x) dx$.

שאלה 6 · הפונקציות $2 \sin^2 2x$ ו- $\cos 4x - 1$: זיהוי גרפים, אינטגרלים ונפח

נתונות הפונקציות: $f(x) = 2 \sin^2 2x$, $g(x) = \cos 4x - 1$.



א. מצא בין ארבעת הגרפים הבאים את הגרף המתאים לכל אחת מהפונקציות, נמק קביעתך.

ב. מצא את הערך של c , אם ידוע כי: $f(x) + c \cdot g(x) = 0$.

ג. נתון: $\int_0^\pi f(x) dx = a$. בכמה גדול $\int_0^\pi f(x) dx$ מ- $\int_0^\pi g(x) dx$? נמק תשובתך. (אין חובה לחשב במפורש את שני האינטגרלים).

ד. חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר מסיבוב סביב ציר ה- x של גרף הפונקציה $\sqrt{f(x)}$ בתחום: $0 \leq x \leq \pi$.

ה. רשום ביטוי אפשרי לכל אחת משתי הפונקציות שהגרפים שלהן מופיעים בסעיף א ושאינן מתאימות לפונקציות הנתונות $f(x)$ ו- $g(x)$, אם ידוע שניתן לקבלן על ידי הזזה ו/או שיקוף ביחס לציר ה- x מהפונקציות הנתונות. הסבר בחירותיך.

שאלה 7 · סדרה חשבונית: שלושה שלישים של סדרה וסכומיהם

בסדרה חשבונית יש $3n$ איברים.

סכום n האיברים האחרונים גדול פי 2 מסכום n האיברים הקודמים להם.

א. הוכח שסכום n האיברים הראשונים הוא 0.

ב. נתון גם שסכום האיברים החמישי והשביעי הוא 0. סכום כל איברי הסדרה הוא 726. מצא את הפרש הסדרה.

כל הברריות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math