

בגרות במתמטיקה - שאלון 571

מבחן לדוגמה 5 של משרד החינוך

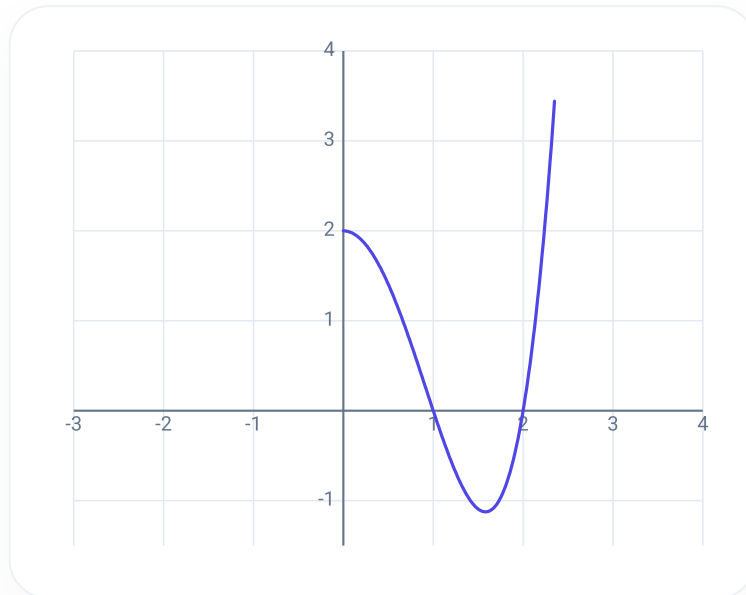
5 יח"ל · שאלון 035571 · 7 שאלות

שאלה 1 · שאלות קצרות: זוגיות מגרף, סדרה הנדסית, טור הנדסי טריגונומטרי ואינטגרל של הזזה

ענה על שלושה מארבעת הסעיפים א-ד.

נתונה $f(x)$, פונקציה המוגדרת לכל x .

חלק מגרף הפונקציה מוצג בסרטוט כאשר $x \geq 0$.



א(1). השלם את הסרטוט אם הפונקציה היא זוגית.

א(2). האם ייתכן שהפונקציה היא אי-זוגית?

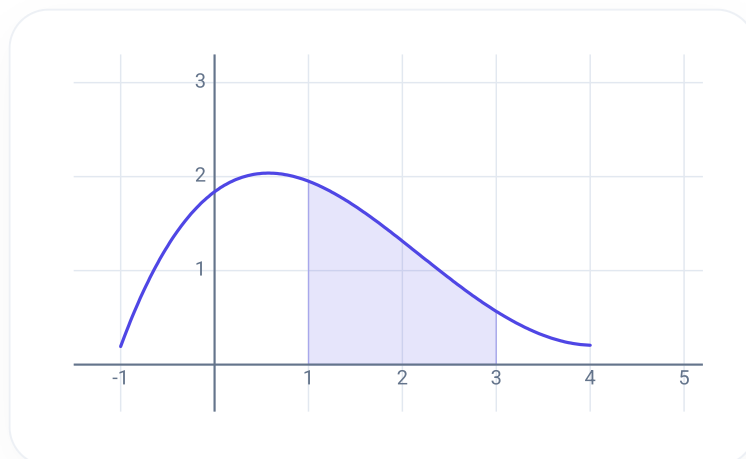
ב(1). הוכח כי בסדרה הנדסית a_n לכל $n > k > 0$ מתקיים: $a_n^2 = a_{n+k} \cdot a_{n-k}$.

ב(2). בסדרה הנדסית יש $2n + 1$ איברים. מכפלת איברי הסדרה היא 387,420,489, האיבר האמצעי שווה ל-9.

חשב את מספר האיברים בסדרה.

ג. מצא את הערכים האפשריים של x עבורם ערכו של הסכום האינסופי הבא: $\cos x - \cos^2 x + \cos^3 x - \dots$ הוא $\frac{1}{3}$.

נתון $\int_1^3 f(x)dx = S$.



אם ניתן, רשום ביטוי לערכי האינטגרלים הבאים. נמק קביעתך.

ד(1). $\int_4^6 f(x-3)dx$

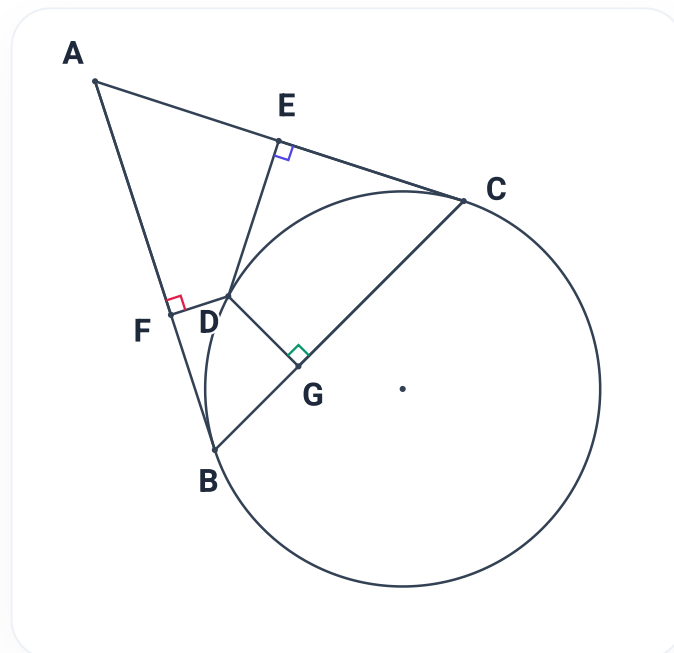
ד(2). $\int_{-1}^1 f(x+3)dx$

ד(3). $\int_1^3 f(x-3)dx$

ד(4). $\int_2^4 f(x-1)dx$

שאלה 2 · משיקים ממעגל ושלושה אנכים: דמיון, זוויות ומכפלת מרחקים

מנקודה A שמחוץ למעגל יוצאים שני ישרים המשיקים למעגל בנקודות B ו- C . מנקודה D שעל הקשת BC מורידים אנכים ל- AC , ל- AB ול- BC . האנכים חותכים את AC , את AB ואת BC בנקודות E , F ו- G בהתאמה (ראו ציור).



א. הוכח כי $\triangle DFB \sim \triangle DGC$.

ב. הוכיחו $\angle BDG = \angle EDC$.

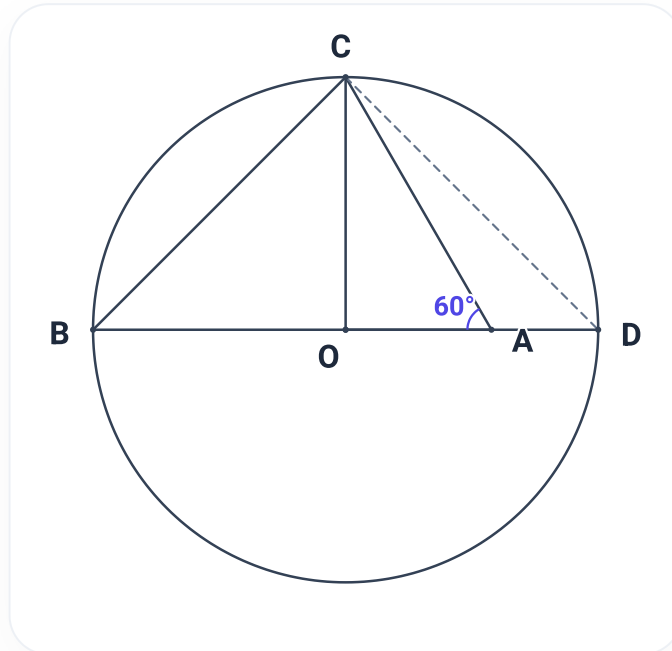
האם ניתן להסיק שהזוויות $\angle BDG$ ו- $\angle EDC$ קדקודיות?

ג. הוכח כי: $DF \cdot DE = DG^2$.

ד. האם יתכן ש- DG ממוצע גאומטרי של הקטעים שהוא מקצה על הבסיס? (כלומר $BG \cdot GC = DG^2$). נמק.

שאלה 3 · טריגונומטריה במעגל: משפט הסינוסים, יחס שטחים ופסילת פתרון

הקודקודים B ו- C של משולש ABC נמצאים על מעגל שמרכזו O ורדיוסו R . מרכז המעגל נמצא על הצלע AB . המשך הצלע AB פוגש את המעגל בנקודה D . נתון: $\angle CAB = 60^\circ$, $\angle BDC = \alpha$.



א. בטא באמצעות R ו- α את BC .

ב. בטא באמצעות R ו- α את AO .

ידוע שהיחס בין שטח המשולש OBC לשטח המשולש AOC הוא $\sqrt{3}$.

ג(1). חשב את גודל הזווית α .

ג(2). מצא את היחס בין שטח המשולש ACD לשטח המשולש ACO .

שאלה 4 · הסתברות: שני מבחנים - טבלה, הסתברות מותנית הפוכה וברנולי

בבית ספר תיכון ערכו שני מבחנים לקראת קבלה לכיתה המדעית.

70% מהתלמידים עברו את המבחן הראשון. ידוע, כי אם בוחרים באקראי תלמיד, ההסתברות שהוא הצליח רק במבחן הראשון קטנה פי 4 מההסתברות שהוא הצליח בשני המבחנים.

40% מהתלמידים שלא עברו את המבחן הראשון, לא עברו את המבחן השני.

א. בוחרים באקראי תלמיד מבין אלה שעברו את המבחן השני. מה ההסתברות שהוא לא עבר בהצלחה את המבחן הראשון?

ב. בוחרים באקראי 6 מכלל תלמידי בית הספר. מהי ההסתברות ששליש מהם עברו את שני המבחנים.

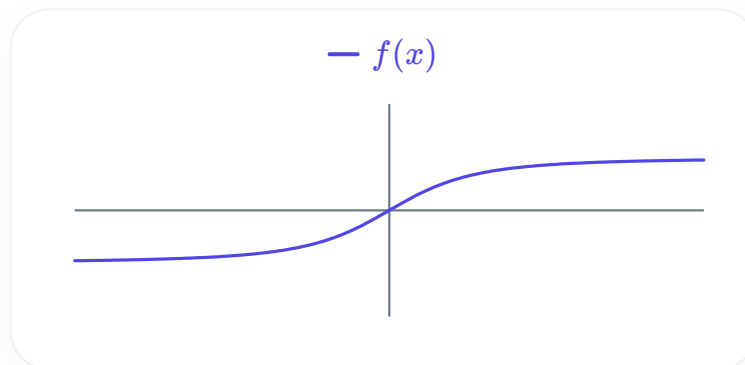
שאלה 5 · פונקציית שורש: משיק, אסימפטוטות שונות באינסופים, שטח עם משיק וטרנספורמציות

נתונה הפונקציה: $g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$.

א. מצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה ב- $x = 1$.

בסרטוט שלפניך מתואר גרף הפונקציה:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$



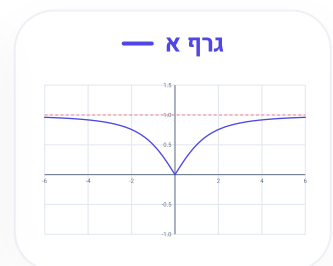
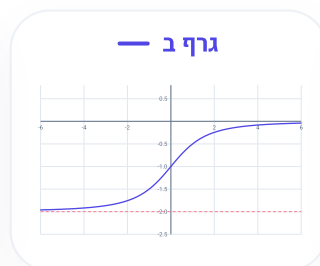
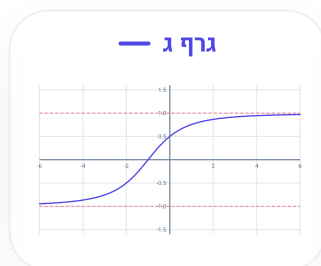
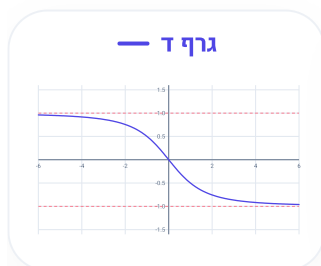
ב. רשום את המשוואות של האסימפטוטות המקבילות לצירים, אם קיימות.

ג. לגרף הפונקציה $f(x)$ העבירו ברביע הראשון משיק ששיפועו $\frac{3}{8}$.

חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק הנ"ל וציר ה- y .

רשום תשובתך באמצעות שורשים או בהצגה עשרונית עם שלוש ספרות לאחר הנקודה העשרונית.

ד. היעזר בפונקציה הנתונה ובסרטוט הגרף שלה, ורשום הצגה אלגברית אפשרית לכל אחת מהפונקציות המתאימות לארבעת הגרפים א, ב, ג, ד המוצגים בסרטוטים שלפניך. נמק.



שאלה 6 · סדרה חשבונית: סכום הסכומים החלקיים והוכחה באינדוקציה

נתונה הסדרה החשבונית הבאה: $4, 9, 14, 19, \dots$

נסמן ב- S_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה הנ"ל.

א. הבע באמצעות n את S_n .

ב. הוכח באינדוקציה או בכל דרך אחרת, כי עבור כל n טבעי מתקיים:

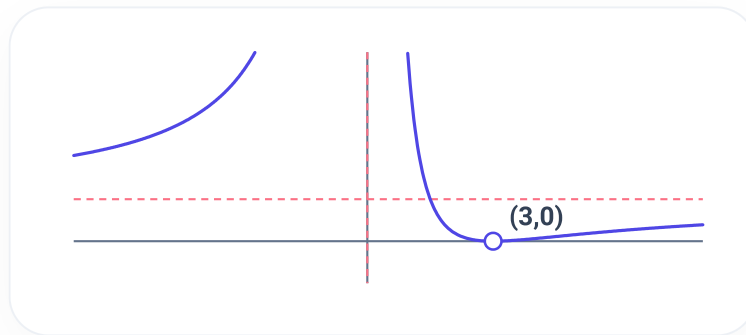
$$S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n = \frac{n(n+1)(5n+7)}{6}$$

ג. חשב את ערך הסכום הבא: $S_4 + S_5 + \dots + S_{16}$

שאלה 7 · פונקציה רציונלית: פרמטרים מתוך גרף עם נקודה ריקה, משיק והזזה

בסרטוט מתואר גרף של פונקציה $f(x)$ שלא מוגדרת רק עבור $x = 3$ ו- $x = 0$.

האסימפטוטות של הפונקציה הן $x = 0$ ו- $y = 1$.



א. נתון כי הגרף מתאים לפונקציה:

$$f(x) = \frac{(x-a)^3}{bx^3 - 3x^2}$$

היעזר בנתונים שבסרטוט ומצא את הערכים של הפרמטרים a ו- b . פרט שיקולך.

ב. הצב את הערכים של a ו- b שמצאת בסעיף א ומצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם האסימפטוטה האופקית.

ג. נתונה הפונקציה $g(x) : g(x) = f(x-k) + k$, $k > 0$.

האם ייתכן ששתי האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ נחתכות בנקודה $(5, 5)$? אם כן - מהו הערך של k ? אם לא - נמק קביעתך.

כל הבגריות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math