

שאלה 1 · שאלת חובה: תקפות אינדוקציה, זוגיות הנגזרת, פונקציית הצטברות ואיברים בסדרה חשבונית

ענה על שלושה מתוך ארבעת הסעיפים הבאים:

א. לפניך טענה:

אם ל- n טבעי מסוים $n^3 - n$ מתחלק ב-3 ללא שארית, אז גם $(n+1)^3 - (n+1)$ מתחלק ב-3 ללא שארית.

דן אומר:

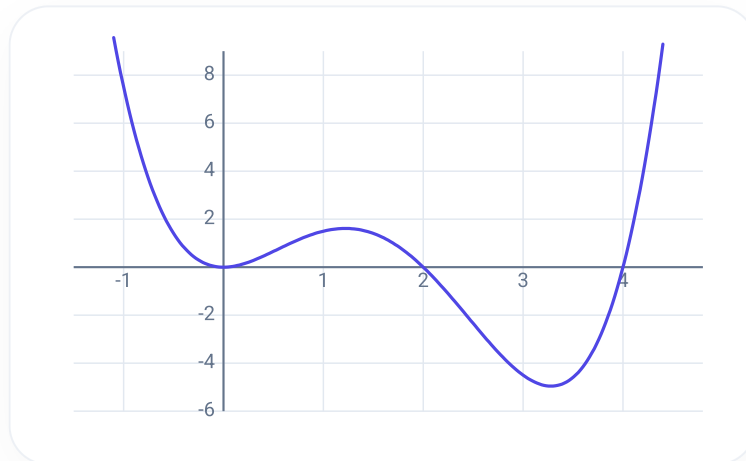
הטענה שלמעלה מספיקה כדי להוכיח שהביטוי $n^3 - n$ מתחלק ב-3 ללא שארית לכל n טבעי. האם דן צודק? נמק את תשובתך.

ב. נתונה פונקציה זוגית שגזירה בכל נקודה.

לפניך טענה: "פונקציית הנגזרת של הפונקציה הנתונה היא אי-זוגית".

קבע אם הטענה נכונה או לא נכונה. אם הטענה נכונה - הוכח אותה, אם לא - הצג דוגמה נגדית.

לפניך גרף הפונקציה $f(x)$. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $-1.1 \leq x \leq 4.4$.



נגדיר: $a > -1$, $F(a) = \int_{-1}^a f(x) dx$.

ג(1). האם $F(0)$ חיובי או שלילי? נמק.

ג(2). תן דוגמה לערך של a שבו הפונקציה $F(a)$ יורדת.

ג(3). באיזה ערך של a יש לפונקציה $F(a)$ מקסימום? נמק.

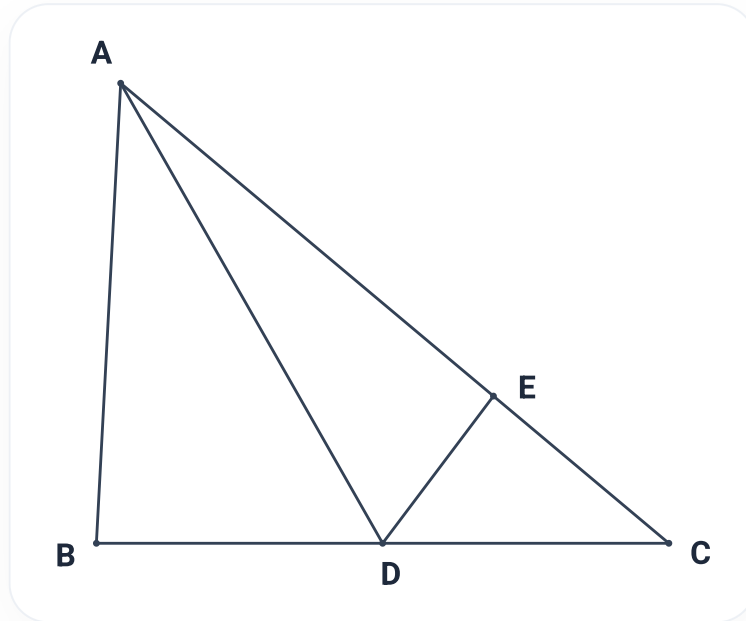
נתונה סדרה חשבונית ובה $2n+1$ איברים. הפרש הסדרה הוא d .

ד(1). הוכח כי האיבר הראשון, האיבר האמצעי והאיבר האחרון של הסדרה הנתונה מהווים סדרה חשבונית.

ד(2). הבע את הפרש הסדרה של שלושת האיברים מסעיף ד(1) באמצעות n ו- d .

שאלה 2 · מרובע בר חסימה במשולש: דמיון, יחס צלעות ויחס שטחים

במשולש $\triangle ABC$ הקטע AD הוא תיכון לצלע BC . הנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שהמרובע $ABDE$ הוא בר חסימה במעגל.



א. הוכח: $\triangle ABC \sim \triangle DEC$.

ב. נתון גם: $\frac{AE}{EC} = \frac{17}{8}$. חשב את היחס $\frac{BC}{AC}$.

ג. נתון כי שטח המשולש $\triangle DEC$ הוא S . הבע באמצעות S את שטח המרובע $ABDE$.

שאלה 3 · משיקים וקוטר במעגל: זוויות, אורך משיק וחס שטחים

במעגל שרדיוסו R חסום משולש ABC .

ידוע כי:

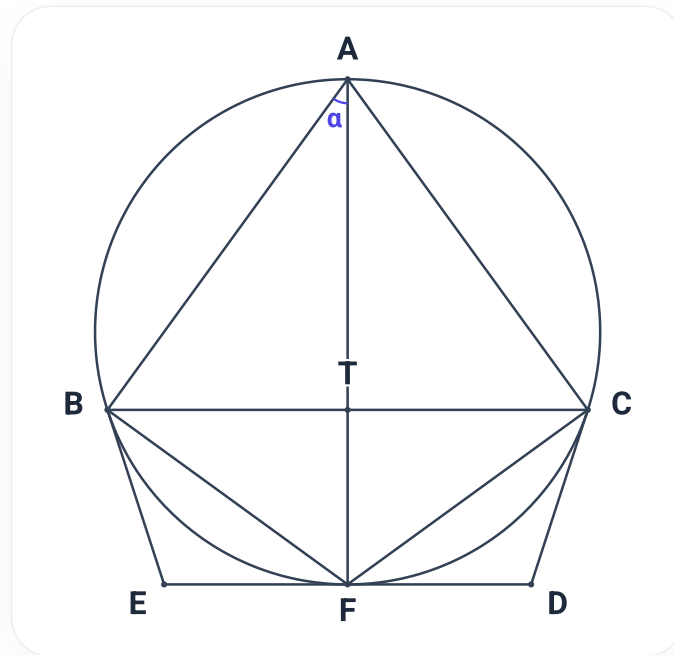
AF הוא קוטר במעגל. המשיק למעגל בנקודה F מקביל למיתר BC .

הנקודה E היא נקודת החיתוך של המשיק למעגל ב- F עם המשיק למעגל ב- B .

הנקודה D היא נקודת החיתוך של המשיק למעגל ב- F עם המשיק למעגל ב- C .

AF ו- BC נפגשים בנקודה T .

נתונה הזווית: $\angle BAF = \alpha$.



א. בטא באמצעות α את $\angle BEF$. הסבר שיקוליך בקצרה.

ב. הוכח כי: $BE = R \tan \alpha$.

ג. חשב את מידת הזווית α עבורה שטח המשולש BFC גדול פי 3 משטח המשולש BEF .

ד. עבור $\alpha = 30^\circ$, בטא באמצעות R את אורכו של הקטע BD .

שאלה 4 · הסתברות עם פרמטר: אי-תלות, הסתברות מותנית וברנולי

ערכו סקר בין משתתפי כינוס בחירות ומצאו: 20% מהנשים קוראות עיתון בוקר. מספר הגברים גדול פי a ממספר הנשים שקוראות עיתון בוקר.

א. בטא באמצעות a את ההסתברות לבחור גבר מבין כלל משתתפי הכינוס.

ב. מהי ההסתברות לבחור משתתף/משתתפת שקורא/קוראת עיתון בוקר, אם ידוע שהמאורעות: "נבחרה אישה" ו-"נבחר מישהו שקורא/קוראת עיתון בוקר" בלתי תלויים? הסבר.

עבור הסעיפים הבאים: ידוע כי $a = 6$ (והמאורעות מסעיף ב בלתי תלויים).

ג. נבחר באקראי משתתף/משתתפת מבין באי הכינוס. ידוע שהוא קורא/קוראת עיתון בוקר. מה סביר יותר, שהוא גבר או אישה?

ד. הנח כי מספר המשתתפים בכינוס גדול מאוד. בוחרים באקראי 6 ממשתתפי הסקר (גברים או נשים). מהי ההסתברות לבחור לפחות חמש נשים שקוראות עיתון בוקר?

שאלה 5 · סדרה חשבונית מכלל נסיגה לסכומים, וסכום טלסקופי של מנות

הסדרה $a_1, a_2, a_3, \dots$ מוגדרת על ידי כלל הנסיגה:

$$\begin{cases} S_1 = 9 \\ S_{n+1} = S_n - 7n + 9 \end{cases}$$

כאשר $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$.

א. הוכח שהסדרה $a_1, a_2, a_3, \dots$ היא חשבונית.

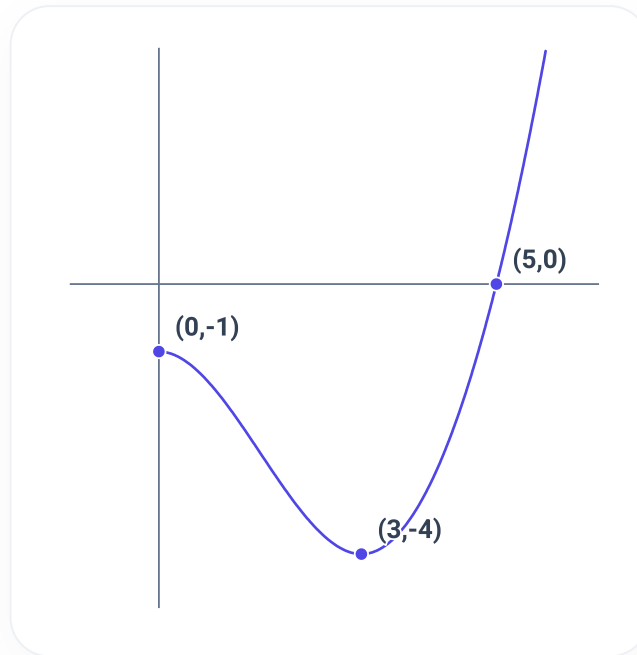
מגדירים סדרה נוספת: $b_{n+1} - b_n = a_n$.

ב. חשב את הסכום הבא (רשום תשובתך באמצעות שברים, או בדיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית):

$$\frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} + \frac{b_3 - b_2}{a_2 - a_3} + \frac{b_4 - b_3}{a_3 - a_4} + \dots + \frac{b_{20} - b_{19}}{a_{19} - a_{20}}$$

שאלה 6 · מגרף פונקציה זוגית: גרף ההופכית, הנגזרות של g ושטח מתחת ל- g''

לפניך חלק מגרף של פונקציה זוגית: $f(x)$, המוגדרת לכל x :



(בסרטוט: $f(0) = -1$, נקודת המינימום $(3, -4)$, ו- $f(5) = 0$; לכל $x > 3$ הפונקציה עולה, ו- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$).

א. שרטט את הגרף השלם של הפונקציה: $\frac{1}{f(x)}$. פרט בקצרה שיקולך.

עבור הסעיפים הבאים ידוע בנוסף כי עבור פונקציה נוספת $g(x)$ מתקיים: $-f(x) = g'(x)$.

ב. שרטט את הגרף השלם של הפונקציה $g'(x)$. פרט בקצרה שיקולך.

ג. היעזר בנתונים שבשרטוט ורשום את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבע את סוגן. נמק בקצרה.

ד. היעזר בנתונים שבשרטוט ורשום את תחומי הקעירות מעלה של $g(x)$. נמק בקצרה.

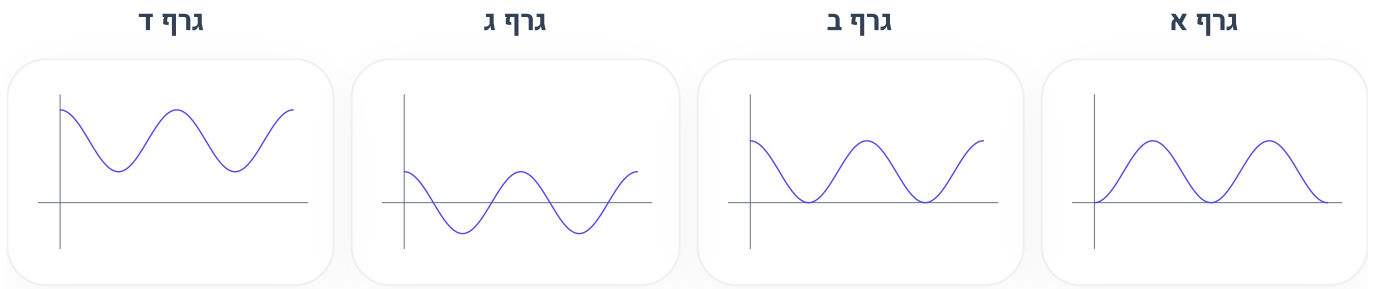
ה. שרטט גרף עבור $g''(x)$ (הנגזרת השנייה של $g(x)$). נמק בקצרה.

ו. מהו גודל השטח הכלוא בין הגרף של $g''(x)$ לבין ציר ה- x ברביע השלישי? נמק.

שאלה 7 · זווית כפולה: זיהוי גרפים, הפרש אינטגרלים ונפח גוף סיבוב

נתונות הפונקציות: $f(x) = 2 \cos^2 2x$, $g(x) = \cos 4x + 2$.

להלן ארבעה גרפים:



א. מצא לכל אחת מהפונקציות את הגרף המתאים מבין ארבעת הגרפים הבאים, נמק קביעתך.

ב. הוכח: $g(x) = f(x) + c$. מה ערכו של c ?

ג. בכמה גדול $\int_0^\pi g(x) dx$ מ- $\int_0^\pi f(x) dx$? נמק תשובתך. (אין חובה לחשב במפורש את שני האינטגרלים).

ד. חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר מסיבוב סביב ציר ה- x של גרף הפונקציה $\sqrt{f(x)}$ בתחום: $0 \leq x \leq \pi$.

כל הברריות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math