

בגרות במתמטיקה - שאלון 571

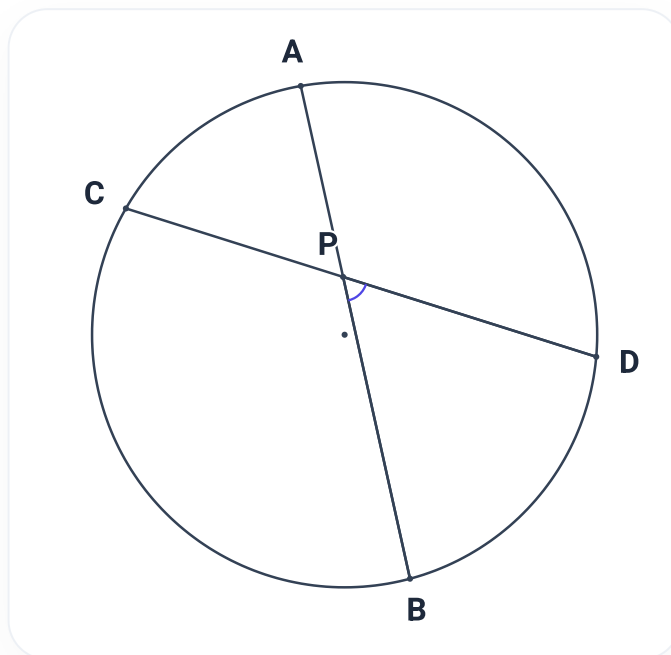
קיץ 2021 מועד א' (תשפ"א)

5 יח"ל · שאלון 035571 · 8 שאלות

שאלה 1 · שאלות קצרות: זווית בין מיתרים, אינדוקציה, זהות פונקציות שורש ופונקציית הצטברות

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

הסרטוט לסעיף א:



א. הראו כי במעגל, הזווית הנוצרת על ידי שני מיתרים שווה למחצית סכום שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן. כלומר יש להראות: $\angle BPD = \frac{AC+BD}{2}$.

ב. לפניכם שתי טענות, ורק אחת מהן נכונה לכל n טבעי. קבעו איזו מהטענות נכונה. הוכיחו את הטענה הנכונה לכל n טבעי באינדוקציה (או בדרך אחרת).

$$\text{א. } \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{2n+4}$$

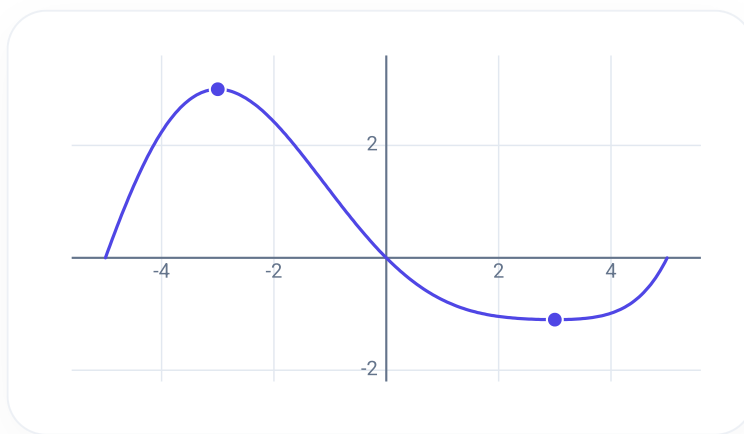
$$\text{ב. } \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{3(n+1)}$$

ג. קבעו אם הטענות הבאות נכונות. נמקו.

א. הפונקציה $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-3}$ זהה לפונקציה $h(x) = \sqrt{(x+1)(x-3)}$.

ב. הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x+1}$ זהה לפונקציה $h(x) = \sqrt{x^2(x+1)}$.

נתון גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-5 \leq x \leq 5$, ונתונה הפונקציה $h(a) = \int_{-4}^a f(x) dx$ עבור $a > -4$.



ד(1). קבעו באיזה תחום הפונקציה $h(a)$ עולה. נמקו.

ד(2). מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה ואת תחומי הקעירות כלפי מטה של הפונקציה $h(a)$. נמקו.

שאלה 2 · סדרה חשבונית מנוסחת הסכום, סדרה הנדסית וסדרה הנדסית אינסופית

נתונה סדרה a_n שסכום n האיברים הראשונים שלה, לכל n טבעי, הוא: $S_n = k \cdot n^2 - p \cdot n$, $k > 0$, $p > 0$ הם פרמטרים.

א(1). הביעו את האיבר הכללי של הסדרה באמצעות k , p ו- n , בעבור $n \geq 2$.

א(2). הנוסחה שמצאתם בתת-סעיף א(1) נכונה בעבור כל n טבעי. הסבירו מדוע.

א(3). הוכיחו כי הסדרה היא סדרה חשבונית, והביעו את d , ההפרש של הסדרה, באמצעות k .

נתונות שתי סדרות הנדסיות b_n ו- c_n . מנת הסדרה b_n שווה ל- d (הפרש הסדרה החשבונית a_n). הסדרה c_n היא סדרה הנדסית אינסופית שהמנה שלה שווה ל- $\frac{2}{d}$. נתון: $k = 1.5$, $p = 4.5$, $a_1 = b_1 = c_1$.

ב. הסבירו מדוע הסדרה c_n היא סדרה מתכנסת.

נתון כי היחס בין סכום m האיברים הראשונים של הסדרה b_n ובין סכום כל איברי הסדרה האינסופית c_n הוא $40\frac{1}{3}$.

ג. חשבו את m .

ד. האם הסדרה c_n היא סדרה עולה, סדרה יורדת או סדרה לא עולה ולא יורדת? נמקו את תשובתכם.

שאלה 3 · טבלה דו-ממדית, נוסחת ברנולי והסתברות מותנית: סקר בדיקות קורונה

בבית ספר תיכון גדול מאוד, מספר התלמידים גדול פי 9 ממספר המורים. בבית הספר נערך סקר שהשתתפו בו כל המורים והתלמידים בבית הספר, והם בלבד. המשתתפים בסקר נשאלו אם הם נבדקו לגילוי קורונה. נמצא כי 80% מן המורים בבית הספר נבדקו לגילוי קורונה. כמו כן נמצא כי $\frac{13}{15}$ מכלל המשתתפים בסקר (מורים ותלמידים) שנבדקו לגילוי קורונה היו תלמידים.

א. מהי ההסתברות שמבין כלל המשתתפים בסקר ייבחר באקראי תלמיד שלא נבדק לגילוי קורונה?

בחרו באקראי בזה אחר זה 5 משתתפים מבין כלל משתתפי הסקר.

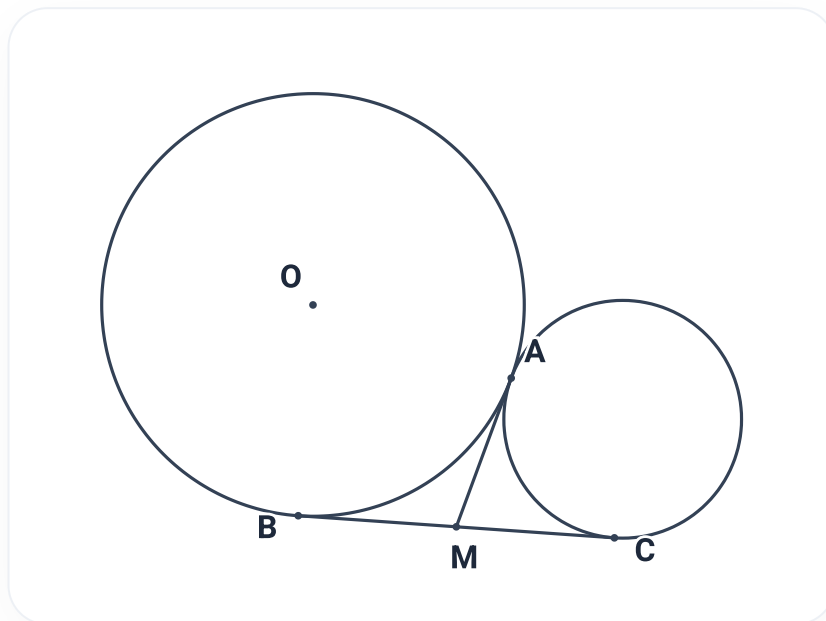
ב. מהי ההסתברות שלפחות 4 מהם נבדקו לגילוי קורונה?

ג. ידוע כי מבין החמישה שנבחרו, לפחות משתתף אחד נבדק לגילוי קורונה. מהי ההסתברות שלפחות 4 מן המשתתפים שנבחרו נבדקו לגילוי קורונה?

ד. ידוע כי מבין החמישה שנבחרו, בדיוק 2 נבדקו לגילוי קורונה. מהי ההסתברות שהאחרון שנבחר נבדק לגילוי קורונה?

שאלה 4 · שני מעגלים משיקים: משיק משותף פנימי וחיצוני, רדיוס ויחס שטחים

שני מעגלים משיקים זה לזה בנקודה A (ראו סרטוט). הנקודה O היא מרכז המעגל השמאלי. מעבירים בנקודה A משיק משותף לשני המעגלים. B ו- C הן נקודות ההשקה של ישר נוסף שמשק לשני המעגלים. שני המשיקים נחתכים בנקודה M .



א. הוכיחו כי הזווית $\angle BAC$ ישרה.

ב. הוכיחו כי: $4 \cdot AM^2 = AC^2 + AB^2$.

נתון: $AC = 6$, $AB = 8$.

ג. חשבו את רדיוס המעגל שמרכזו הוא בנקודה O .

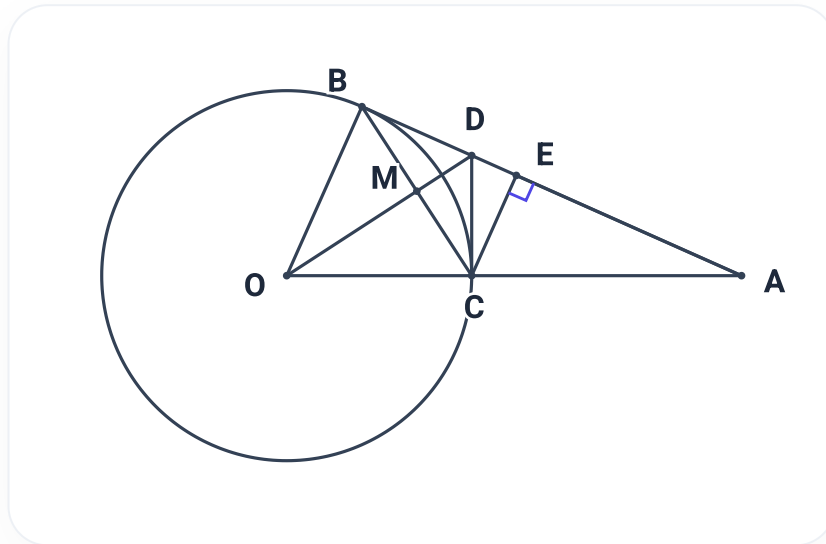
ד. חשבו את יחס השטחים: $\frac{S_{\triangle OBM}}{S_{\triangle AMC}}$.

שאלה 5 • שני משיקים למעגל: מרובעים ברי-חסימה, קוטרי מעגלים חוסמים ומשוואה עם זווית כפולה

DB ו- DC משיקים למעגל שמרכזו O , כמתואר בסרטוט. רדיוס המעגל: R .

המשך BD חותך את המשך OC בנקודה A . הקטע OD והמיתר BC נחתכים בנקודה M . הקטע CE מאונך ל- AB .

. $\sphericalangle ABC = \alpha$:|n|n|



א(1). הסבירו מדוע אפשר לחסום במעגל את המרובע $OBDC$.

א(2). הסבירו מדוע אפשר לחסום במעגל את המרובע $MDEC$.

נסמן: d_1 הוא קוטר המעגל החוסם את המרובע $OBDC$. d_2 הוא קוטר המעגל החוסם את המרובע $MDEC$. d_3 הוא קוטר המעגל החוסם את המשולש AOD .

ב. הביעו באמצעות α ו- R את d_1 , את d_2 ואת d_3 .

ג. מצאו את הערך של α שבעבורו מתקיים: $\frac{d_2}{d_1} = \frac{d_1}{d_3}$.

שאלה 6 · שתי פונקציות רציונליות אי-זוגיות: חזקה זוגית ואי-זוגית במכנה, זיהוי גרף ושטח

נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{x}{(x^2-2)^2}$, $g(x) = \frac{x}{(x^2-2)^3}$

ענו על תת-סעיפים (1)-(4) בעבור כל אחת משתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

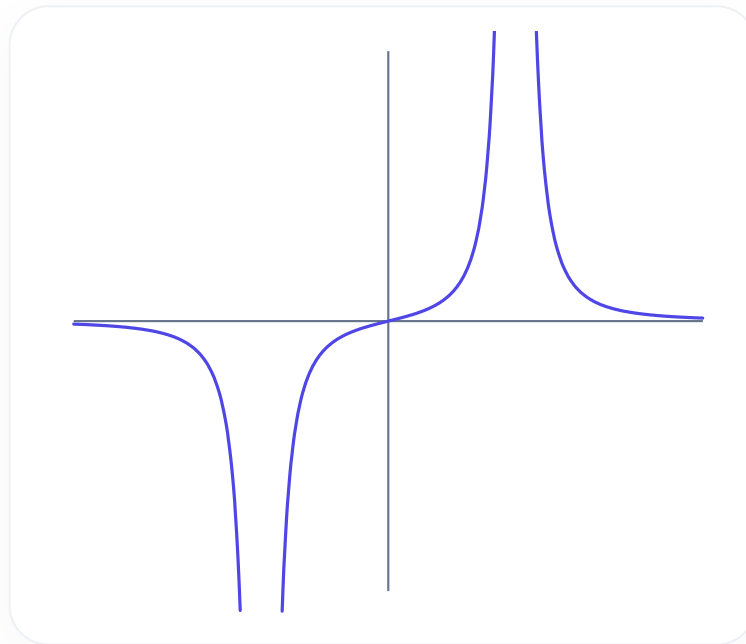
א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

א(3). הראו כי אין לפונקציה נקודות קיצון.

א(4). הוכיחו כי הפונקציה היא אי-זוגית.

הגרף שלפניכם מתאר את אחת הפונקציות $f(x)$, $g(x)$.



ב(1). קבעו איזו מן הפונקציות הגרף מתאר. נמקו את קביעתכם.

ב(2). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה האחרת.

נתונה פונקציה $h(x)$ המקיימת: $h'(x) = f(x)$. $f(x)$ ו- $h(x)$ מוגדרות באותו תחום.

ג. מה הם תחומי העלייה והירידה של $h(x)$?

ד(1). חשבו את $\int_{-1}^1 f(x) dx$. נמקו את תשובתכם.

ד(2). חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, ציר ה- x והישרים: $x = -1$, $x = 1$. (הדרכה: הנגזרת של $x^2 - 2$ היא $2x$.)

נתונה הפונקציה: $k(x) = f(x) + b$, $b \neq 0$ הוא פרמטר.

ה. האם הפונקציה $k(x)$ זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמקו את תשובתכם.

שאלה 7 · פונקציית שורש עם פרמטר: קיצון בקצה התחום, הפונקציה $\frac{1}{f}$ ומשיק משותף

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2-4a}}{x^3}$, $a > 0$ הוא פרמטר.

בסעיפים א-ה, בטאו את תשובותיכם באמצעות a לפי הצורך.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ב. הוכיחו שהפונקציה $f(x)$ אי-זוגית.

ג(1). מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים?

ג(2). מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה גם הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

ה(1). מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

ה(2). מה הן משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$, אם יש כאלה?

ידוע כי בכל אחת מנקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, יש לגרף של $f(x)$ ולגרף של $g(x)$ משיק משותף.

ו(1). הוסיפו לסרטוט שבמחברתכם סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$. פרטו את שיקוליכם.

ו(2). מהו הערך של a ? נמקו את תשובתכם.

שאלה 8 · משולש עם צלע נתונה וזווית מולה: היקף מקסימלי ומשולש שווה שוקיים

במשולש ABC אורך הצלע BC הוא a . נתון: $\angle BAC = \alpha$ (α ברדיאנים). נסמן: $\angle ABC = x$ ($0 < x < \pi - \alpha$).

א. הביעו באמצעות x , α ו- a את היקף המשולש ABC .

ב. הביעו באמצעות α את ערך ה- x שבעבורו היקף המשולש ABC הוא מקסימלי.

ג. הסבירו מדוע מתקיים המשפט הזה: מכל המשולשים בעלי צלע נתונה וזווית מולה נתונה, המשולש בעל ההיקף המקסימלי הוא משולש שווה שוקיים.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math