

בגרות במתמטיקה - שאלון 571

קיץ 2021 מועד ב' (תשפ"א)

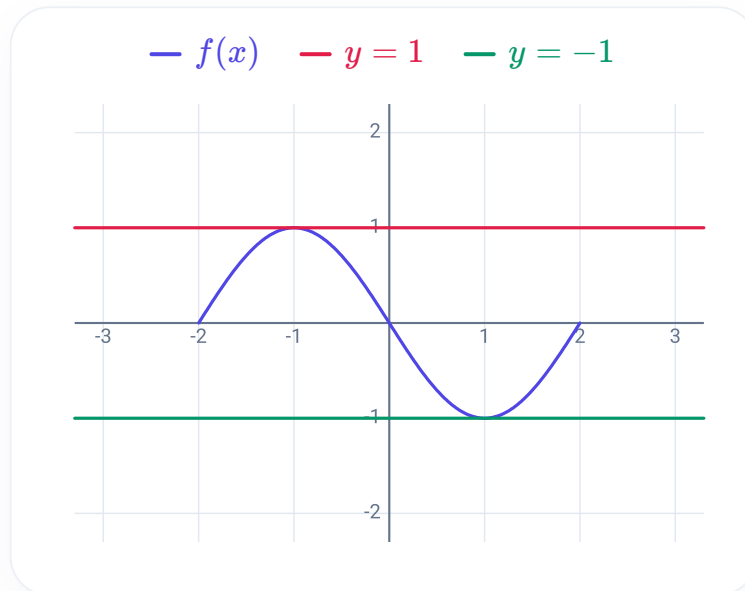
5 יח"ל · שאלון 035571 · 7 שאלות

שאלה 1 · שאלות קצרות: אינטגרל של פונקציה אי-זוגית, טבלת הסתברויות עם פרמטר, אסימפטוטות

ומלבן, זוויות בכוכב

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

בסרטוט שלפניכם: גרף של פונקציה אי-זוגית $f(x)$ בתחום: $-2 \leq x \leq 2$ והישרים: $y = 1$, $y = -1$. קבעו עבור כל אחת מן הטענות הבאות אם היא נכונה או לא. נמקו.



$$\int_0^2 f(x)dx = 0.5 \int_{-2}^2 f(x)dx \quad \text{א(1)}$$

$$\int_{-2}^0 f(x)dx > \int_0^2 (f(x))^2 dx \quad \text{א(2)}$$

נתונה טבלת הסתברויות ובה מידע חלקי:

סה"כ	$\bar{A}$	A	
$2a$		$2a^2 - \frac{1}{8}$	B
			$\bar{B}$
1		a	סה"כ

ב(1). האם המאורעות A ו- B תלויים זה בזה? נמקו.

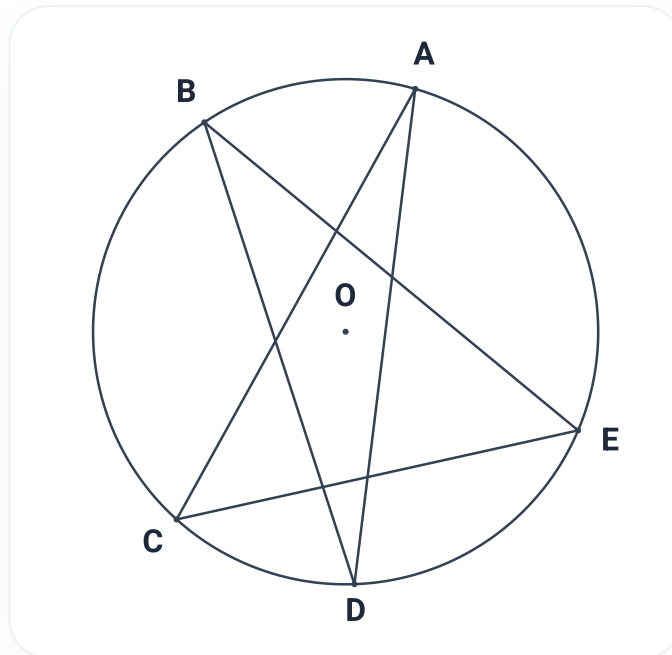
ב(2). נתון: $P(A \cap B) = 5P(\bar{A} \cap \bar{B})$. חשבו את a .

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax^2+10x-12}{2x^2-10x+12}$. a הוא פרמטר חיובי. ציר ה- x והאסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים יוצרים מלבן ששטחו 2.

ג(1). מהו הערך של הפרמטר a ?

ג(2). נתונה הפונקציה: $g(x) = f(x + 3)$. מהו השטח של המלבן שנוצר על ידי ציר ה- x והאסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים? נמקו.

במעגל שמרכזו בנקודה O חסום כוכב. הנקודות: A, B, C, D, E הן קודקודי הכוכב (ראו סרטוט).



ד. הוכיחו שסכום 5 הזוויות של קודקודי הכוכב: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E$ הוא 180° .

שאלה 2 · סדרה הנדסית: סכומי תת-סדרות, סדרת הופכיים מתכנסת ותנאי לשלושה איברים

נתונה סדרה הנדסית אין-סופית a_n שאיבריה: $a_1, a_2, a_3, \dots$ והמנה שלה q . הביעו באמצעות q ו- a_1 את ערכי הסכומים שלפניהם.

$$A = a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{40} \quad \text{א(1)}$$

$$B = a_4 + a_8 + a_{12} + \dots + a_{40} \quad \text{א(2)}$$

נתון כי a_n היא סדרה עולה וכי: $\frac{A}{B} = \frac{10}{9}$.

ב. מצאו את ערכו של q .

בונים מן הסדרה a_n הנתונה סדרה הנדסית אין-סופית b_n המקיימת לכל n טבעי: $b_n = 3a_{n+1}$.

ג. מצאו את המנה של הסדרה b_n .

בונים סדרה הנדסית אין-סופית חדשה: $-\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, -\frac{1}{b_3}, \frac{1}{b_4}, \dots$

ד. הביעו את הסכום של כל איברי הסדרה החדשה באמצעות a_1 .

נתונה הסדרה: $\frac{1}{a_1}, a_1, b_1$.

ה(1). האם ייתכן שסדרה זו חשבונית? נמקו את תשובתכם.

ה(2). האם ייתכן שסדרה זו הנדסית? נמקו את תשובתכם.

שאלה 3 · עץ הסתברויות תלת-שלבי: מכשולים בתחרות, הסתברות מותנית וברנולי

בתחרות ספורט שנערכת בבית ספר משתתפים תלמידים רבים. כל משתתף צריך להצליח לעבור 3 מכשולים בזה אחר זה לפי הסדר. משתתף שלא מצליח לעבור מכשול מודח מייד מן התחרות. ההסתברות להצליח לעבור מכשול שונה ממכשול למכשול, אך שווה לכל המשתתפים. משתתף שמצליח לעבור את כל שלושת המכשולים עולה לשלב חצי הגמר. 28% מן המשתתפים בתחרות הצליחו לעבור את שני המכשולים הראשונים. ההסתברות שמשתתף שמצליח לעבור את שני המכשולים הראשונים יודח מן התחרות גדולה פי 3 מן ההסתברות שהוא יעלה לשלב חצי הגמר.

א. חשבו את ההסתברות שמשתתף בתחרות יעלה לשלב חצי הגמר.

ההסתברות שמשתתף יצליח לעבור את המכשול הראשון ולא יעבור את המכשול השני היא 0.42.

ב. חשבו את ההסתברות שמשתתף בתחרות לא יצליח לעבור את המכשול הראשון.

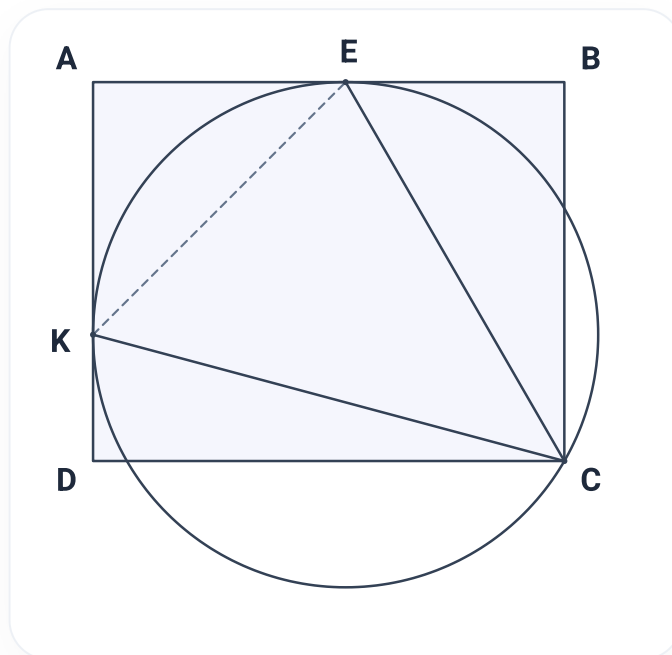
בחרו באקראי שלושה משתתפים: עומר, גל וליאור. ידוע ששלושתם הצליחו לעבור את המכשול הראשון.

ג(1). חשבו את ההסתברות שבדיוק שניים מהם עלו לשלב חצי הגמר.

ג(2). חשבו את ההסתברות שמבין השלושה, רק עומר וגל יעלו לשלב חצי הגמר.

שאלה 4 · מעגל המשיק לשתי צלעות של מלבן ועובר דרך הקודקוד הנגדי: זוויות, משפט הסינוסים וזהויות

המרובע $ABCD$ הוא מלבן ששני צלעותיו AB ו- AD , משיקות למעגל שרדיוסו R בנקודות E ו- K בהתאמה. הנקודה C נמצאת על המעגל (ראו סרטוט).



א. הוכיחו: $\angle KCE = 45^\circ$.

נתון: $0^\circ < \alpha < 45^\circ$, $\angle KCD = \alpha$.

ב(1). הביעו באמצעות α את הזוויות של המשולש KCE .

ב(2). הביעו באמצעות α ו- R את האורכים של צלעות המשולש KCE .

ג. הביעו באמצעות α את היחס $\frac{EB}{AE}$.

נתון: $\frac{EB}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

ד. חשבו את α .

שאלה 5 · חקירת $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$ עם פרמטר, הפונקציות f^2 ו- $\frac{1}{f^2}$ ושטח

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $a > 0$, הוא פרמטר. הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. הוכיחו כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ג(1). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

ג(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

ג(3). מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

ג(4). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $(f(x))^2$ שתחום ההגדרה שלה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ד. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $(f(x))^2$ וקבעו את סוגן.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{(f(x))^2}$. תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ה. הסתמכו על הסעיפים הקודמים וסרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

הציבו $a = 2$.

ו. חשבו את השטח המוגבל על ידי הגרף של הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = 3$ ו- $x = 4$.

שאלה 6 · חקירת $3 + \frac{\cos^2 x}{\sin x}$ בתחום, וזיהוי הגרפים של $f - 3$ ושל $\sqrt{f - 3}$

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)} + 3$. ענו על הסעיפים שלפניכם בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

א(3). מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

א(4). מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

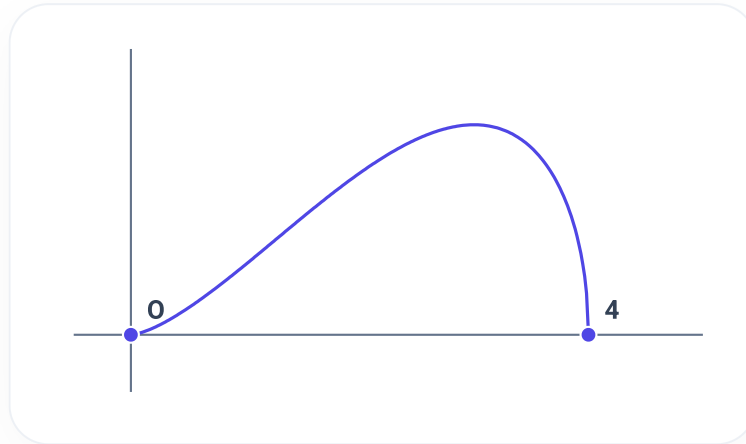
נתונות שתי פונקציות: $k(x) = f(x) - 3$, $g(x) = \sqrt{f(x) - 3}$.

ג. אחד מן הגרפים א-ד שלפניכם מתאר את הפונקציה $k(x)$, ואחד מן הגרפים מתאר את הפונקציה $g(x)$. קבעו איזה מן הגרפים מתאר כל אחת מן הפונקציות ונמקו את קביעותיכם.



שאלה 7 · פונקציית שורש עם שני פרמטרים: פרמטרים מתחום ההגדרה, ומשולש מקסימלי בתחום מוגבל

בסרטוט שלפניכם מוצגת הפונקציה: $f(x) = \sqrt{ax^4 + bx^3}$. נתון שתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא: $0 \leq x \leq 4$.



א(1). הוכיחו כי $b = -4a$.

א(2). לפניכם שתי טענות I-II. רק אחת מהן נכונה. קבעו מהי הטענה הנכונה, ונמקו את קביעתכם.

I. $b < 0$, $a > 0$.

II. $b > 0$, $a < 0$.

הנקודה P נמצאת על גרף הפונקציה $(f(x))^2$ המוגדרת גם היא בתחום: $0 \leq x \leq 4$. מהנקודה P מעבירים ישר המאונך לציר ה- x . M היא נקודת החיתוך של האנך עם ציר ה- x , ו- O היא ראשית הצירים.

ב. מהו שיעור ה- x של הנקודה P שבעבורו שטח המשולש PMO הוא מקסימלי? נמקו את תשובתכם.

ג. בעבור שיעור ה- x שמצאת בסעיף ב, בטאו באמצעות a את השטח המקסימלי של המשולש PMO .

ד. אם ידוע כי שיעור ה- x של הנקודה P נמצא בתחום שבו הפונקציה $(f(x))^2$ אינה יורדת, מהו שיעור ה- x של הנקודה P שבעבורו שטח המשולש PMO הוא מקסימלי? נמקו את תשובתכם.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math