



## שאלה 1 · שאלות קצרות: התחלקות באינדוקציה, גרף הנגזרת ונקודות פיתול, פונקציית הצטברות, משיקים

### למעגל

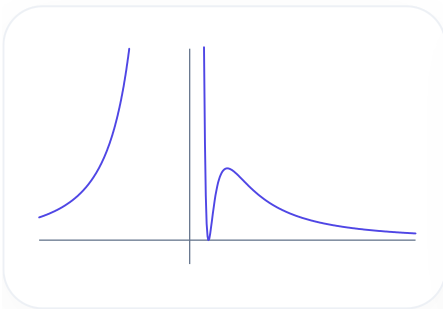
ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א(1). בעבור כל  $n$  טבעי, הוכיחו באינדוקציה או בדרך אחרת כי הביטוי  $4^n - 1$  מתחלק ב-3 ללא שארית.

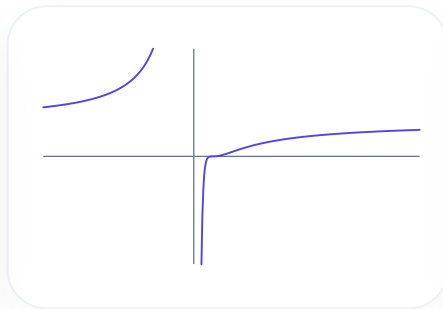
א(2). נתון:  $p$  הוא מספר שלם. כתבו דוגמה לערך של  $p$  שבעבורו הביטוי  $4^{n+1} + p$  מתחלק ב-12 ללא שארית, לכל  $n$  טבעי.

נתונה הפונקציה:  $f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)^3$ .

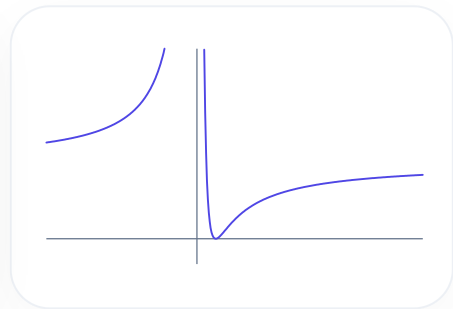
גרף ג



גרף ב



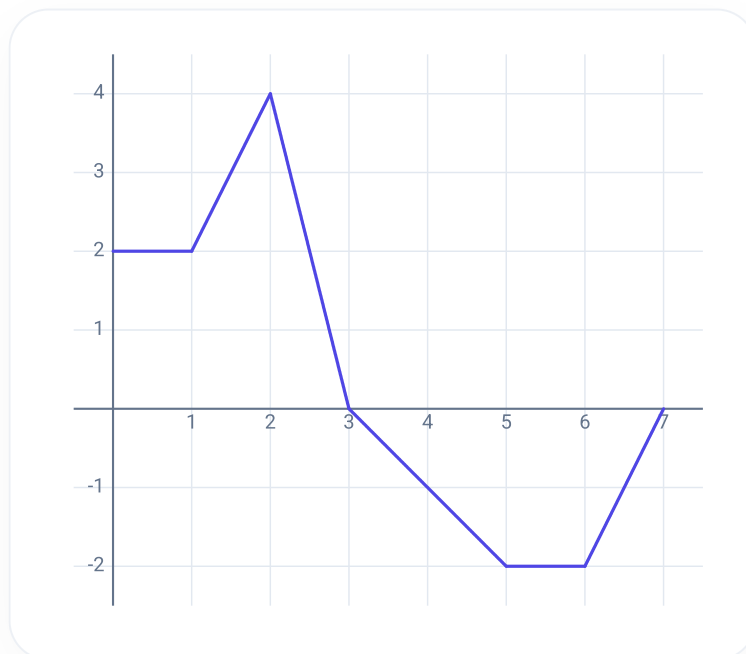
גרף א



ב(1). אחד מן הגרפים א-ג מתאר את פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ . קבעו איזה מהם, ונמקו בקצרה.

ב(2). קבעו כמה נקודות פיתול יש לפונקציה  $f(x)$ . נמקו את התשובה.

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$  המוגדרת בתחום  $0 \leq x \leq 7$ , ונתונה הפונקציה  $h(t) = \int_0^t f(x) dx$  בתחום זה.

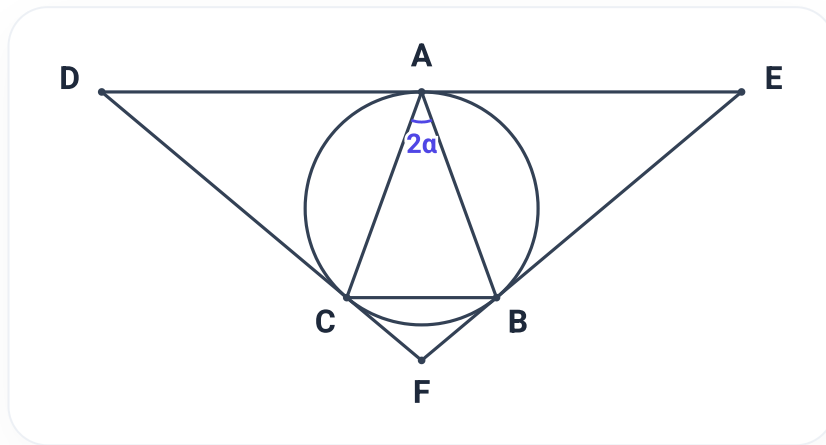


ג(1). חשבו את הערכים של:  $h(0)$ ,  $h(3)$ ,  $h(5)$ .

קבעו באיזה תחום  $h(t)$  יורדת. נמקו את התשובה.

ג(2).

לפניכם משולש ABC שווה-שוקיים ( $AB = AC$ ) חסום במעגל (ראו סרטוט). נסמן את זווית הראש של המשולש ב-  $2\alpha$ . דרך כל אחד מקודקודי המשולש מעבירים משיק למעגל. המשיקים נפגשים בנקודות D, E ו-F, כמתואר בסרטוט.



ד. הביעו באמצעות  $\alpha$  את זוויות המשולש DEF.

## שאלה 2 · הכנסת איברים לסדרה הנדסית אין-סופית: יחס סכומים, תת-סדרות ויחס איבר לזנב

סדרה I היא סדרה הנדסית אין-סופית שאיבריה הם:  $a_1, a_2, a_3, \dots$  ומנתה היא:  $9 \cdot r^2$ . נתון:  $0 < r < \frac{1}{3}$ . בין כל שני איברים בסדרה I הכניסו איבר נוסף, ונוצרה סדרה הנדסית חדשה יורדת, סדרה II, שאיבריה הם:  $b_1, b_2, b_3, \dots$  ומנתה היא  $q$ .

א(1). הביעו את  $q$  באמצעות  $r$ .

א(2). הסבירו מדוע שתי הסדרות I ו-II מתכנסות.

נתון כי סכום סדרה II גדול פי  $\frac{4}{3}$  מסכום סדרה I.

ב. חשבו את  $q$ .

נתון כי סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה II הוא 15.

ג. מצאו את סכום כל האיברים של סדרה II במקומות שמתחלקים ב-5 ( $b_5, b_{10}, b_{15}, \dots$ ).

ד. מצאו בסדרה II את היחס בין האיבר החמישי לבין סכום כל האיברים שאחרי איבר זה.

ה. הוכיחו כי בכל סדרה הנדסית מתכנסת היחס בין איבר כלשהו לבין סכום כל האיברים שאחריו אינו תלוי במיקום של האיבר בסדרה.

### שאלה 3 · משחק עם שלוש תוצאות: מציאת $p$ , ברנולי, משחקים מסוימים והסתברות מותנית

נטע משחקת במשחק מסוים. במשחק זה יש בדיוק שלוש תוצאות אפשריות: ניצחון, תיקו והפסד. ההסתברות שנטע תנצח במשחק גדולה פי 3 מן ההסתברות שהיא תפסיד במשחק. נסמן ב- $p$  את ההסתברות שנטע תפסיד במשחק ( $p > 0$ ). בשאלה כולה תוצאות המשחקים אינן תלויות זו בזו. נתון שאם נטע משחקת 2 משחקים בזה אחר זה, ההסתברות שהיא תנצח במשחק אחד לפחות היא  $4.5p$ .

א. מצאו את הערך של  $p$ .

נטע שיחקה 5 משחקים בזה אחר זה.

ב. מצאו את ההסתברות שנטע תנצח ב-3 משחקים לפחות.

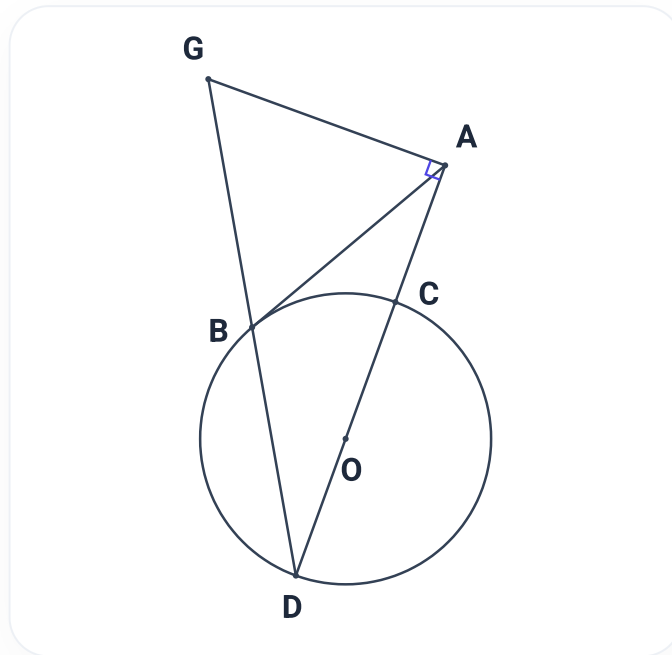
ג. מצאו את ההסתברות שנטע תנצח בשלושת המשחקים הראשונים לפחות.

ד(1). מצאו את ההסתברות שנטע לא תפסיד בשום משחק.

ד(2). ידוע כי נטע הפסידה במשחק אחד לפחות. מהי ההסתברות שהיא ניצחה בשלושת המשחקים הראשונים וקיבלה תוצאת תיקו במשחק האחרון?

#### שאלה 4 · משיק וחותר דרך המרכז: זוויות, דמיון, משפט המשיק והחותר ויחס שטחים

נתון מעגל שרדיוסו  $R$  ומרכזו  $O$ . מנקודה  $A$  שמחוץ למעגל יוצאים שלושה ישרים: הישר  $AB$  משיק למעגל בנקודה  $B$ , הישר  $AD$  עובר דרך מרכז המעגל  $O$  וחותר את המעגל בנקודות  $C$  ו- $D$ , והישר  $AG$  מאונך לישר  $AD$  (ראו סרטוט). הנקודות  $D, B$  ו- $G$  נמצאות על ישר אחד, כמתואר בסרטוט. נסמן:  $\angle ADB = \alpha$ .



א. הביעו את כל זוויות המשולש  $ABG$  באמצעות  $\alpha$ .

ב. הוכיחו:  $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{BC}$ .

נתון:  $AG = 7$ ,  $AC = \frac{1}{2}DC$ .

ג. חשבו את  $R$ .

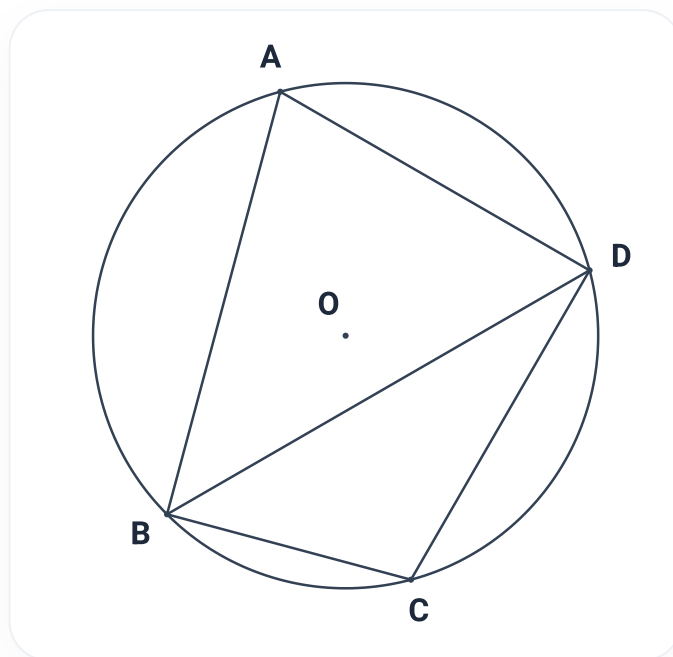
נסמן ב- $S$  את שטח המשולש  $BDC$ .

ד(1). הוכיחו:  $\triangle ADG \sim \triangle BDC$ .

ד(2). הביעו את שטח המשולש  $ADG$  באמצעות  $S$ .

**שאלה 5 · מרובע חסום במעגל: משפט הסינוסים, משוואה ריבועית ב- $\cos \alpha$  ויחס גבהים**

מרובע ABCD חסום במעגל שרדיוסו  $R$  ומרכזו  $O$  (ראו סרטוט). נסמן:  $\angle DAB = \alpha$ ,  $\alpha$  היא זווית חדה.



א. הביעו את אורך האלכסון BD באמצעות  $\alpha$  ו- $R$ .

נתון:  $BC = R$ ,  $CD = R\sqrt{2}$ .

ב. חשבו את  $\alpha$ .

נתון: BD הוא חוצה זווית ABC.

ג. חשבו את גודל הזווית ABD.

נסמן ב- $h_1$  את הגובה שיורד מקודקוד A במשולש ABD, וב- $h_2$  את הגובה שיורד מקודקוד O במשולש BOD.

ד. חשבו את  $\frac{h_1}{h_2}$ .

**שאלה 6 · חקירת  $3x + \frac{3}{x}$ , זיהוי גרפים של  $f$ ,  $f'$  ו- $f \cdot f'$ , ואינטגרל של  $f \cdot f'$**   
נתונה הפונקציה:  $f(x) = 3x + \frac{3}{x}$ .

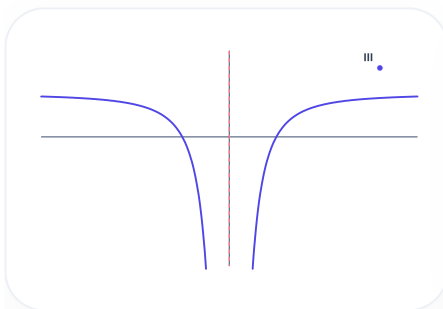
א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

א(2). האם הפונקציה  $f(x)$  היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? הוכיחו את התשובה.

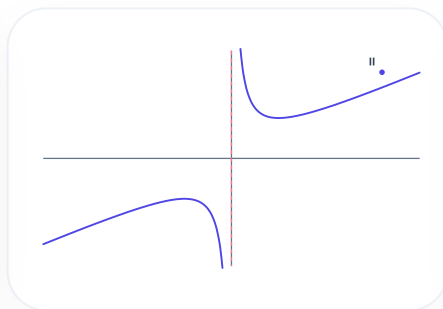
א(3). מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה  $f(x)$ .

נתונות שתי פונקציות:  $f'(x)$  ו- $g(x)$ .  $f'(x)$  היא פונקציית הנגזרת של  $f(x)$ , ו- $g(x)$  מקיימת:  
 $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$ . הפונקציות  $f'(x)$  ו- $g(x)$  מוגדרות באותו התחום כמו הפונקציה  $f(x)$ .  
כל אחד מן הגרפים I-III שלפניכם מתאר את אחת הפונקציות:  $f(x)$ ,  $f'(x)$  ו- $g(x)$ .

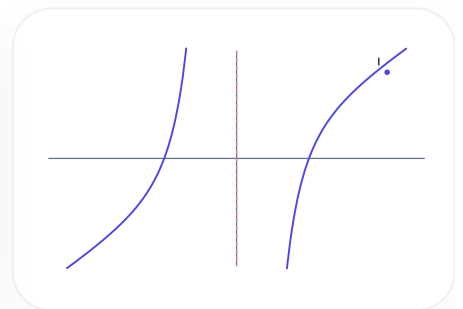
גרף III



גרף II



גרף I



ב. לכל אחת מן הפונקציות כתבו איזה גרף מתאר אותה. נמקו את התשובה.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה  $g(x)$  עם ציר ה- $x$ .

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקציה  $g(x)$ , על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי הישרים:  $x = \frac{1}{2}$  ו- $x = 2$ .

ה. נתון:  $a > 1$  הוא פרמטר. חשבו את:  $\int_a^1 g(x) dx$ .

נתונה הפונקציה:  $h(x) = \int_1^x f'(t) dt$ . נתון כי הפונקציה  $h(x)$  מוגדרת בתחום  $1 \leq x$ .

ו. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה  $h(x)$ , וקבעו את סוגה.

## שאלה 7 · פונקציה טריגונומטרית עם נקודות אי-רציפות סליקות: קיצון בתחום סגור, מספר פתרונות ושטח

### מתחת לנגזרת

נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{2(\cos x)^2 + \sin 2x}{2 \cos x}$ , בתחום:  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

א(2). הסבירו מדוע לפונקציה  $f(x)$  אין אסימפטוטות המאונכות לציר ה- $x$ .

א(3). מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים.

ב(1). הראו כי לכל  $x$  בתחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$  מתקיים:  $f'(x) = \cos x - \sin x$ .

ב(2). מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבעו את סוגן.

ג(1). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

ג(2).  $t$  הוא מספר. מצאו את כל ערכי  $t$  שבעבורם יש למשוואה:  $f(x) = t$  פתרון יחיד (בתחום:  $0 \leq x \leq 2\pi$ ).

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ , על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי שני הישרים:  $x = \frac{3}{4}\pi$  ו- $x = \frac{5}{4}\pi$ .

## שאלה 8 · הפונקציות $x^3$ ו- $\sqrt{x^3}$ : קטע אופקי בין הגרפים ומשולש בעל שטח מקסימלי

נתונות שתי פונקציות:  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = \sqrt{f(x)}$ .

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$  ואת תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$ .

א(2). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם גרף הפונקציה  $g(x)$ .

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$ , והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה  $g(x)$  כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $x$ . נתון כי שיעור ה- $x$  של הנקודה A נמצא בין שיעורי ה- $x$  של נקודות החיתוך של הפונקציה  $f(x)$  עם הפונקציה  $g(x)$ . נסמן ב- $p$  את שיעור ה- $x$  של הנקודה A.  $p$  הוא פרמטר.

ב. הביעו באמצעות  $p$  את אורך הקטע AB.

ג. הנקודה O היא ראשית הצירים. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OAB.

ד. האם השטח המקסימלי של המשולש OAB מתקבל כאשר אורך הקטע AB הוא מקסימלי? נמקו את התשובה.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: [www.guyai.co.il/bagrut/math](http://www.guyai.co.il/bagrut/math)