

בגרות במתמטיקה - שאלון 571

קיץ 2022 מועד ב' (תשפ"ב)

5 יח"ל · שאלון 035571 · 8 שאלות

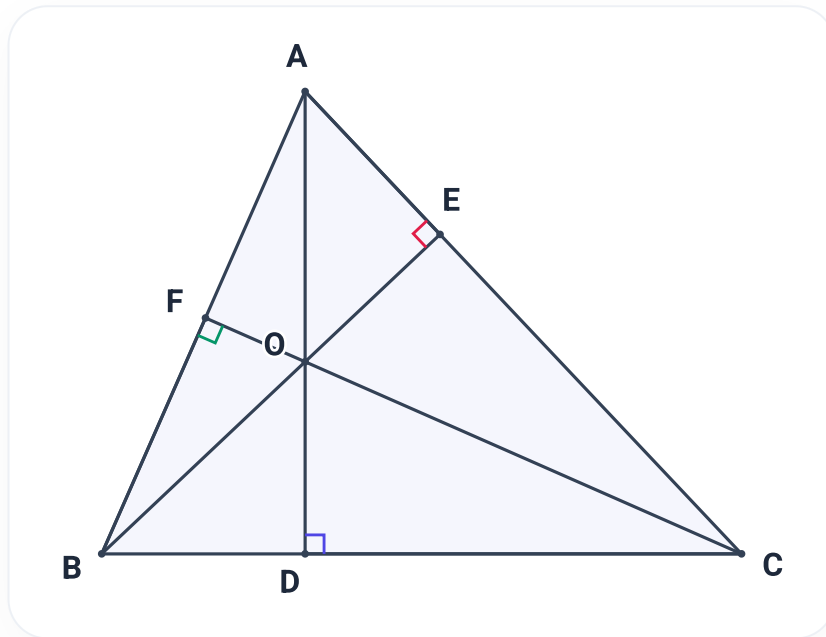
שאלה 1 · שאלות קצרות: אינדוקציה, גבהים במשולש, אסימפטוטות של פונקציית שורש והתאמת גרף

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי בעבור כל n טבעי מתקיים:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

במשולש חד-זווית ABC , הגבהים AD , BE , CF נפגשים בנקודה O (ראו סרטוט). נתון כי סכום המרחקים של הנקודה O מקודקודי המשולש הוא 20.



ב(1). הוכיחו שאפשר לחסום במעגל כל אחד מן המרובעים: $CDOE$, $BDOF$, $AEOF$.

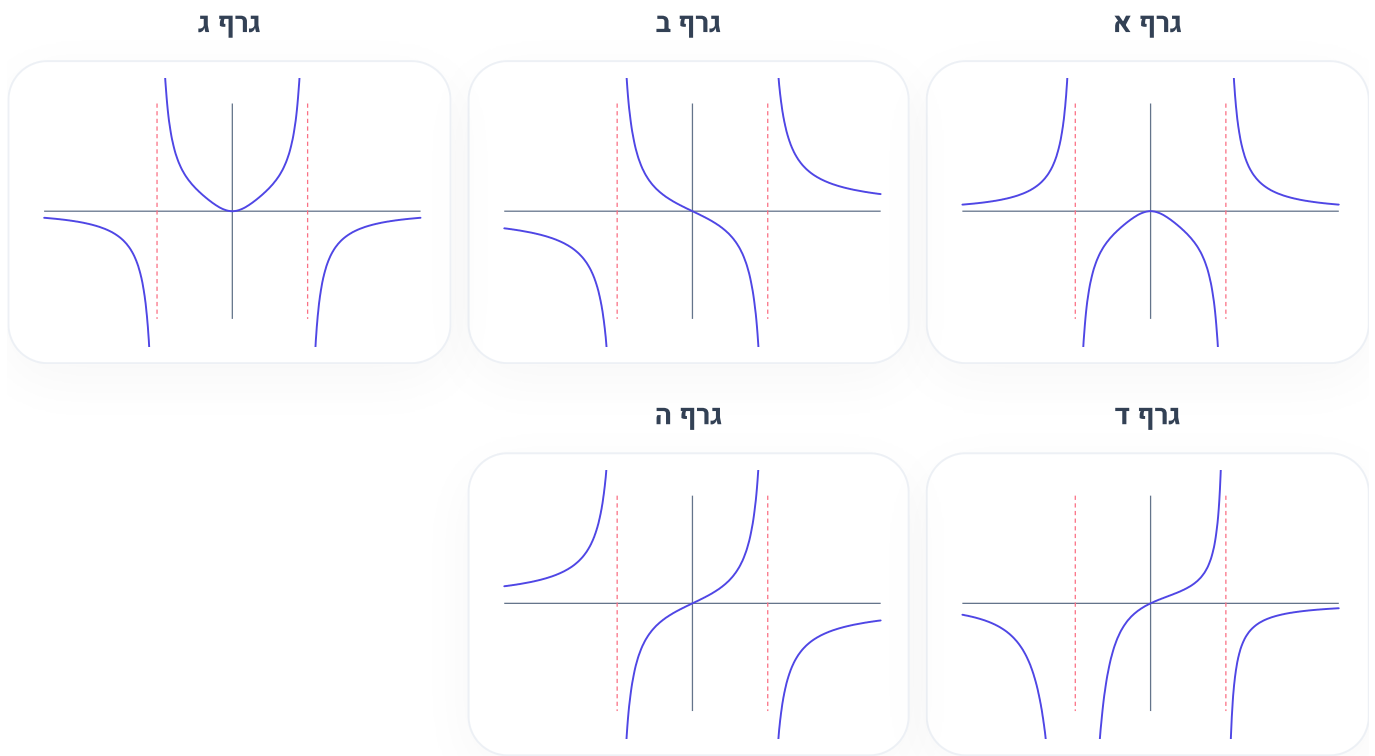
ב(2). מהו סכום ההיקפים של המעגלים החוסמים את המרובעים: $CDOE$, $BDOF$, $AEOF$?

נתונה הפונקציה: $f(x) = 3 + \frac{x}{\sqrt{x^2-25}}$.

ג(1). מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ג(2). ידוע כי האסימפטוטות של גרף הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים, חותכות זו את זו. חשבו את השטח הכלוא בין האסימפטוטות. נמקו את התשובה.

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a \cdot x}{x^2-4}$, המוגדרת עבור: $x \neq 2$ ו- $x \neq -2$, $a \neq 0$. הוא פרמטר. אחד מן הגרפים א-ה שלפניכם מתאים לפונקציה $f(x)$ בעבור $a > 0$, ואחד מהם מתאים לפונקציה $f(x)$ בעבור $a < 0$.



- ד(1). איזה מן הגרפים מתאים לפונקציה $f(x)$ בעבור $a > 0$? נמקו את התשובה בקצרה.
- ד(2). איזה מן הגרפים מתאים לפונקציה $f(x)$ בעבור $a < 0$? נמקו את התשובה בקצרה.

שאלה 2 · סדרה הנדסית: מכפלת האיברים האמצעיים, סדרת ההופכיים וסכום אין-סופי

נתונה סדרה הנדסית אין-סופית A שהאיבר הכללי שלה הוא a_n ומנתה היא q .

א. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים: $a_1 \cdot a_{2n} = a_n \cdot a_{n+1}$.

בעבור $2k$ האיברים הראשונים בסדרה A מתקיים כי מכפלת שני האיברים האמצעיים בסדרה שווה: $10,935 \cdot a_1$.
נתון: $a_{2k-2} = 1,215$.

ב. מצאו את q (שתי אפשרויות).

נתון: $a_1 = 5$.

ג(1). קבעו אם הסדרה A היא סדרה עולה, סדרה יורדת או סדרה לא עולה ולא יורדת. נמקו את התשובה.

ג(2). מצאו את k .

ד. מן הסדרה A בונים את הסדרה האין-סופית B באופן הזה: $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \dots$.

הוכיחו שהסדרה B היא סדרה הנדסית.

ה. בסדרה B מחליפים את הסימן של כל האיברים במקומות האי-זוגיים כך שמתקבלת הסדרה C שלפניכם:

$$-\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, -\frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \dots$$

ה. מצאו את סכום הסדרה C.

שאלה 3 · טבלה דו-ממדית בפרמטר: שליטה באנגלית בקרב מבוגרים וצעירים

בעיר גדולה בישראל נערך סקר ובו נבדקה רמת השליטה בשפה האנגלית בקרב תושבי העיר. בסקר השתתפו אנשים רבים – מבוגרים וצעירים. בסקר נמצא שמספר המבוגרים ששולטים באנגלית גדול פי 3 ממספר הצעירים ששולטים בה, ומספר המבוגרים שלא שולטים באנגלית גדול פי $2\frac{2}{3}$ ממספר המבוגרים ששולטים בה. נסמן ב- p את ההסתברות לבחור באקראי צעיר ששולט באנגלית מבין כלל המשתתפים בסקר.

א. מצאו את ההסתברות לבחור באקראי מבוגר ששולט באנגלית מבין כלל המבוגרים שהשתתפו בסקר.

ב. בוחרים באקראי שלושה מבוגרים מבין המבוגרים שהשתתפו בסקר. מצאו את ההסתברות שבדיוק שניים מהם שולטים באנגלית.

ג(1). הביעו באמצעות p את ההסתברות לבחור באקראי צעיר שלא שולט באנגלית מבין כלל המשתתפים בסקר.

ג(2). הראו כי תחום הערכים האפשרי בעבור p הוא: $0 < p < \frac{1}{12}$.

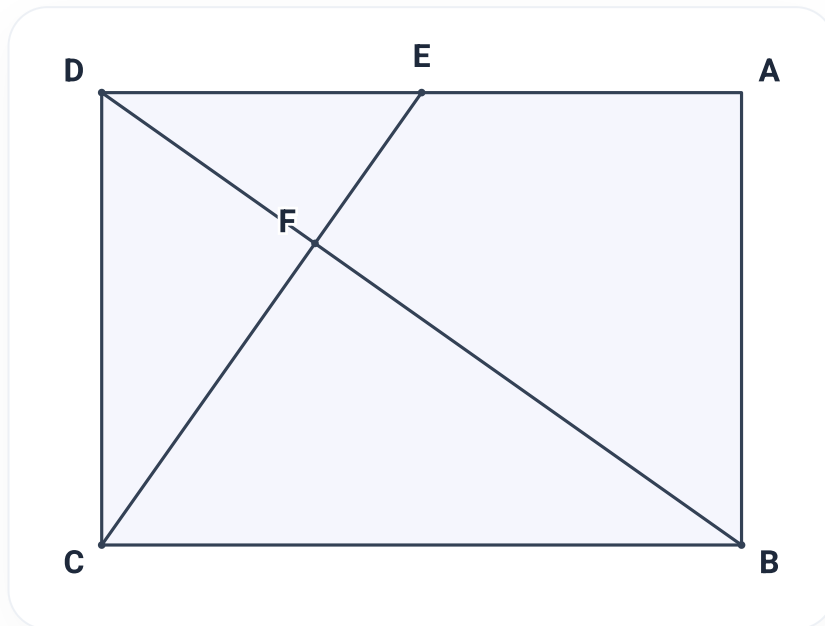
ידוע כי ההסתברות לבחור באקראי מבוגר מבין משתתפי הסקר שלא שולטים באנגלית שווה להסתברות לבחור באקראי צעיר מבין משתתפי הסקר שלא שולטים באנגלית.

ד. מצאו את הערך של p .

ה. האם המאורעות "לשלוט באנגלית" ו"להיות מבוגר" תלויים זה בזה? נמקו את תשובתכם.

שאלה 4 · מלבן ומרובע בר חסימה: דמיון, יחסי שטחים וקוטר המעגל

במלבן $ABCD$, הנקודה E נמצאת על הצלע AD . הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה F . המרובע $EABF$ הוא בר חסימה במעגל.



א. הוכיחו: $\triangle DAB \sim \triangle BFC$.

נתון: $DE = EA$.

ב. חשבו את היחס $\frac{EF}{FC}$.

נסמן את שטח המשולש DEF ב- S .

ג. הביעו את שטחי המשולשים DFC ו-BFC באמצעות S .

ד. חשבו את יחס הדמיון בין המשולש DAB ובין המשולש BFC.

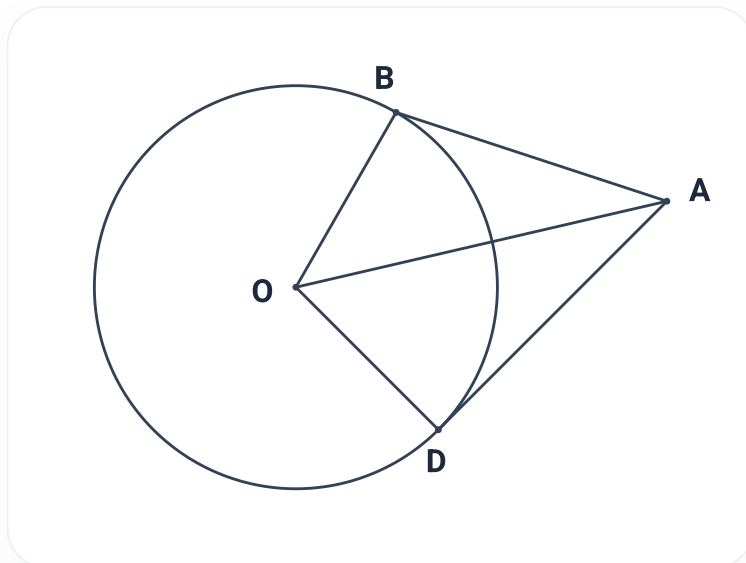
נסמן: $DE = a$.

ה(1). הביעו את אורך האלכסון BD באמצעות a .

ה(2). הביעו את קוטר המעגל החוסם את המרובע EABF באמצעות a .

שאלה 5 · משיק וחותר מנקודה חיצונית: משפט הקוסינוסים, זהות זוויות מיחס רדיוסים

נתון מעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R . מנקודה A, שמחוץ למעגל, העבירו ישר שמשיק למעגל בנקודה D וישר אחר, שחותך את המעגל בנקודה B כמתואר בסרטוט. נסמן: $\angle AOB = \beta$, $\angle AOD = \alpha$.



א(1). הביעו באמצעות α , β ו- R , אם יש צורך, את: אורך הקטע AO.

א(2). אורך הקטע AB.

נתון: $AB = \sqrt{2}R$.

ב. הוכיחו כי: $\cos \beta = \frac{\sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha}$.

משולש ADO חסום במעגל אחר, שרדיוסו r . נתון: $\frac{R}{r} = \frac{2\sqrt{7}}{5}$.

ג. מצאו את גודלי הזוויות α ו- β .

שאלה 6 · פונקציית שורש עם פרמטר: היעדר אסימפטוטות, חקירה, $-f(x+2)$ ו- $|f(x)|$ ואינטגרלים

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2-9}{\sqrt{x+a}}$, a הוא פרמטר חיובי.

א. הביעו באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ אין אסימפטוטות מאונכות לצירים.

ב(1). מצאו את a .

ב(2). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ב(3). מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ב(4). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונות הפונקציות: $g(x) = -f(x+2)$, $h(x) = |f(x)|$.

ג(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ ואת תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$.

ג(2). האם שיעור ה- y של נקודת המקסימום של הפונקציה $g(x)$ גדול משיעור ה- y של נקודת המקסימום של הפונקציה $h(x)$, קטן ממנו או שווה לו? נמקו את התשובה.

נתון כי: $\int_{-1}^3 h(x)dx = \int_{-3}^k g(x)dx$, $k > -3$.

ד. מצאו את k . הסבירו את התשובה.

שאלה 7 · פונקציה טריגונומטרית זוגית: זווית כפולה, חסמים, קיצון של $f(2x)$ ואינטגרל של נגזרות

נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin^2(x) - \cos^2(x) - 1$, המוגדרת לכל x .

א. האם הפונקציה $f(x)$ זוגית? נמקו.

ב. הוכיחו כי לכל x מתקיים: $-2 \leq f(x) \leq 0$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים בתחום: $-\pi \leq x \leq \pi$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום: $-\pi \leq x \leq \pi$.

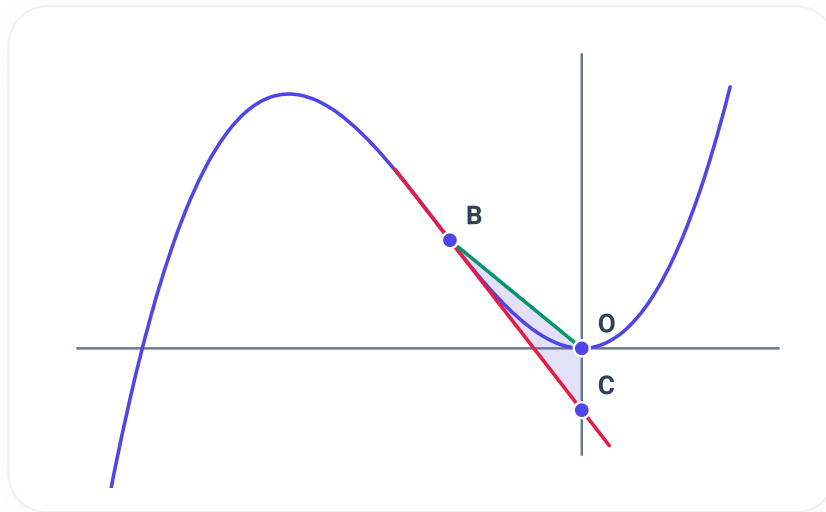
נתונה הפונקציה: $g(x) = f(2x)$, המוגדרת לכל x .

ה. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, וקבעו את סוגן.

ו. נתון כי: $\int_0^{\frac{\pi}{8}} (g'(x) - f'(x)) dx = S$. הביעו באמצעות S את: $\int_{-\frac{\pi}{8}}^0 (g'(x) - f'(x)) dx$. הסבירו את התשובה.

שאלה 8 · משיק לפולינום בנקודה כללית: תחום הפרמטר ושטח מקסימלי של משולש

נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 + 4x^2$, המוגדרת לכל x . הנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע השני (ראו סרטוט). מן הנקודה B מעבירים משיק לגרף הפונקציה $f(x)$. המשיק חותך את ציר ה- y בנקודה C. נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה B.



א. הביעו באמצעות t את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה B.

ידוע כי הנקודה C נמצאת מתחת לציר ה- x .

ב. מהו תחום הערכים של t ?

הנקודה O היא ראשית הצירים.

ג. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OBC.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math