

שאלה 1 · שאלות קצרות: אינדוקציה, קטע אמצעים בטרפז, גרפים של f, f', f'' ו- $\frac{1}{f}$

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

נתונות שתי סדרות המוגדרות לכל n טבעי: $a_n = 2n - 1$, $b_n = 2^n$. נסמן:

$$T_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

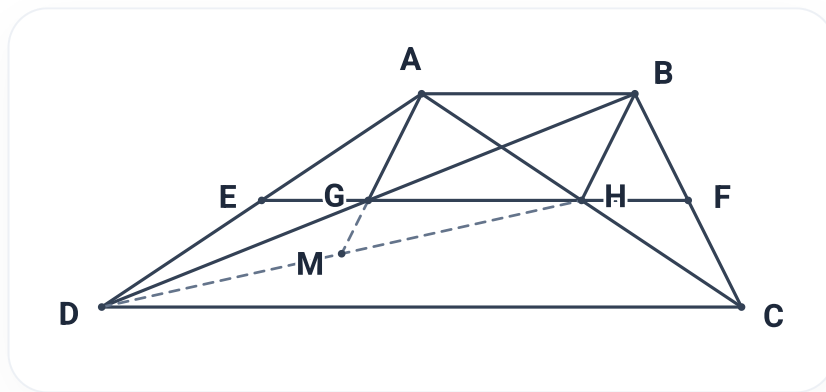
הוכיחו כי: אם בעבור k טבעי כלשהו מתקיים: $T_k = (2k - 3) \cdot 2^{k+1}$, אז מתקיים:

$$T_{k+1} = (2k - 1) \cdot 2^{k+2}$$

לפניכם טענה: לכל n טבעי מתקיים: $T_n = (2n - 3) \cdot 2^{n+1}$.

א(2). הסבירו מדוע טענה זו אינה נכונה.

בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel CD$) הקטע EF הוא קטע אמצעים. הקטע EF חותך את האלכסונים AC ו- BD של הטרפז בנקודות H ו- G בהתאמה. נתון כי המרובע $ABHG$ הוא מקבילית.

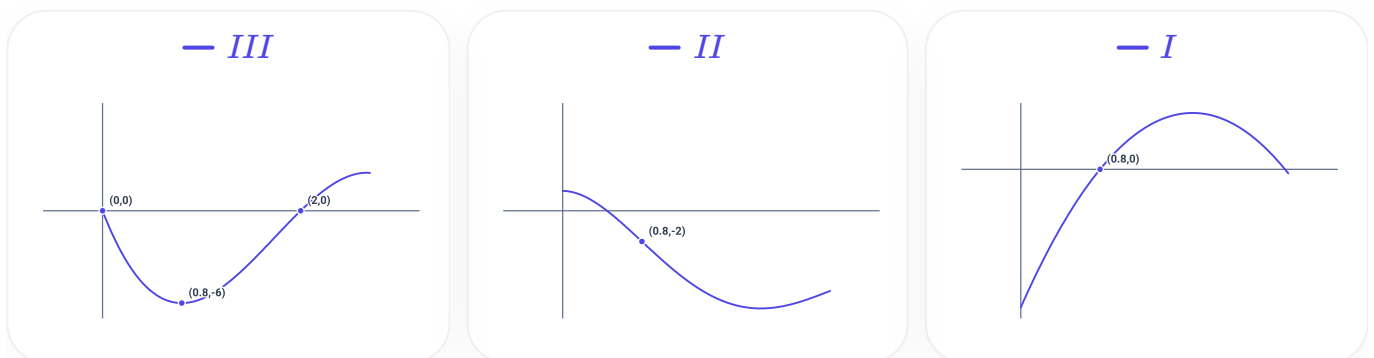


ב(1). הוכיחו: $GH = 2EG$.

המשך הישר AG חותך את הקטע DH בנקודה M .

ב(2). הוכיחו: הקטע AM חוצה את הקטע DH .

לפניכם הגרפים I, II, III, המייצגים את הפונקציה $f(x)$, את פונקציית הנגזרת הראשונה $f'(x)$, ואת פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$. הפונקציות מוגדרות עבור: $0 \leq x \leq 3$.



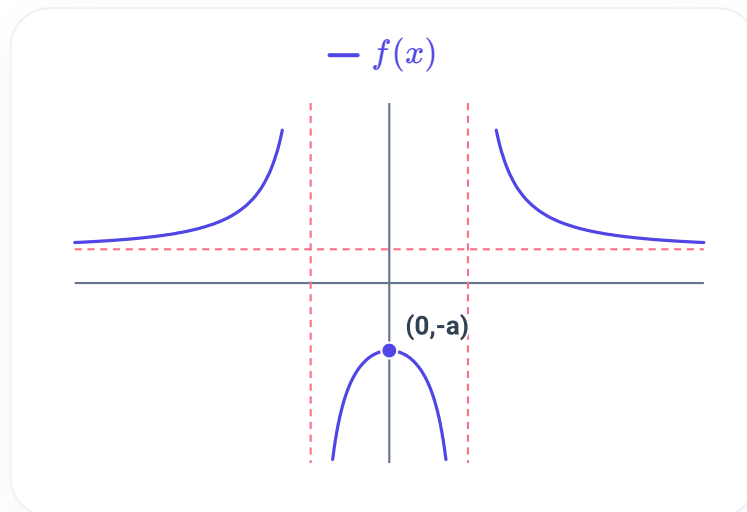
ג(1). התאימו כל אחד מן הגרפים I-III לכל אחת מן הפונקציות: $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$. נמקו.

ענו על התת-סעיפים (2)-(3) על פי הנתונים המופיעים בגרפים I-III.

ג(2). מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת הפיתול שלה.

ג(3). מצאו את הערך של האינטגרל: $\int_0^{0.8} f''(x) dx$.

לפניכם הגרף של הפונקציה $f(x)$. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת עבור: $x \neq 1$, $x \neq -1$. משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ הן: $x = 1$, $x = -1$, $y = k$, $k > 1$. שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y הם: $(0, -a)$, a הוא מספר חיובי.



ד(1). מצאו עבור אילו ערכים של a יש לגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $\frac{1}{f(x)}$ שתי נקודות חיתוך. נמקו.

ד(2). נתון כי המרחק בין האסימפטוטות האופקיות של הפונקציות $f(x)$ ו- $\frac{1}{f(x)}$ הוא 1.5. מהו הערך של k ? נמקו.

שאלה 2 · סדרות הנדסיות אינסופיות: סדרת המנות, מונוטוניות, סדרה חשבונית ושוויון סכומים

נתונות שתי סדרות הנדסיות אינסופיות מתכנסות A ו-B, שכל איבריהן שונים מ-0. האיבר הכללי של הסדרה A הוא a_n ומנתה היא q_A . האיבר הכללי של הסדרה B הוא b_n ומנתה היא q_B .

משתי הסדרות ההנדסיות A ו-B בונים סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת חדשה שאיבריה הם:

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots$$

כל שלוש הסדרות, הסדרה A, הסדרה B והסדרה החדשה, אינן קבועות.

א. הביעו את המנה של הסדרה החדשה באמצעות q_A ו- q_B .

הסדרה A אינה עולה ואינה יורדת, והסדרה B עולה. בנוגע לכל אחד משני ההיגדים (1)-(2) שלפניכם, קבעו אם הוא נכון או לא נכון ונמקו את קביעתכם.

ב(1). מנת הסדרה החדשה היא חיובית.

ב(2). כל איברי הסדרה B הם שליליים.

המספרים c_1, c_2 ו- c_3 הם שלושה איברים ראשונים בסדרה חשבונית. נתון כי c_2 שווה ל- $-c_1$, ומתקיים גם:

$$\frac{c_1 \cdot c_2}{c_3} = -\frac{1}{24}$$

ג. מצאו את c_1 .

נתון כי המנה של הסדרה A שווה ל- c_1 , ומתקיים גם:

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots}$$

ד. מצאו את הערך של q_B .

שאלה 3 · הסתברות: טבלה דו-ממדית עם פרמטר, הסתברות מותנית, איחוד וברנולי

במכללה גדולה הועלתה הצעה לקצר את הפסקת הצהריים כדי לסיים מוקדם יותר את יום הלימודים. בעקבות זאת ערכו משאל ובו השתתפו כל תלמידי שנה א' וכל תלמידי שנה ב'.

על פי תוצאות המשאל התברר כי 80% מן המשתתפים שבעד ההצעה הם תלמידי שנה א'. עוד התברר כי מספר תלמידי שנה א' שבעד ההצעה שווה למספר תלמידי שנה ב' שנגד ההצעה. מבין המשתתפים במשאל לא היו נמנעים.

נסמן ב- p את ההסתברות לבחור באקראי תלמיד שבעד ההצעה מבין כל התלמידים שהשתתפו במשאל.

א. בחרו באקראי אחד מתלמידי שנה ב'. מהי ההסתברות שהוא נגד ההצעה?

ידוע כי ההסתברות שתלמיד שנבחר באקראי מבין תלמידי שנה א' הוא בעד ההצעה, גדולה ב- $\frac{13}{35}$ מן ההסתברות שתלמיד שנבחר באקראי מבין תלמידי שנה ב' הוא בעד ההצעה.

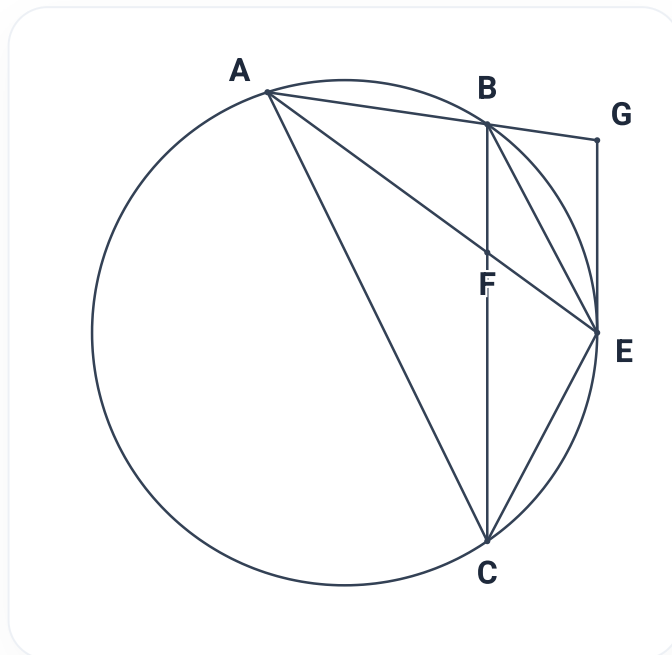
ב. חשבו את הערך של p .

ג. בחרו באקראי אחד מן המשתתפים במשאל. חשבו את ההסתברות שמתקיים לפחות אחד משני התנאים האלה: (1) המשתתף שנבחר הוא תלמיד שנה ב'. (2) המשתתף שנבחר בעד ההצעה.

ד. בחרו באקראי 5 מן המשתתפים במשאל. ידוע כי כל החמישה שנבחרו הם מתלמידי שנה ב'. מהי ההסתברות שלפחות שניים מהם בעד ההצעה וגם לפחות שניים מהם נגד ההצעה?

שאלה 4 · מעגל: אמצע קשת, משיק, דמיון, תאלס ומשפט חוצה הזווית

הנקודות A, B ו-C נמצאות על מעגל. נקודה E היא אמצע הקשת BC, כמתואר בסרטוט שלפניכם. בנקודה E מעבירים משיק למעגל. המשיק חותך את המשך המיתר AB בנקודה G. המיתרים AE ו-BC נחתכים בנקודה F.



א. הוכיחו: $\triangle ACE \sim \triangle AEG$.

נתון: $AG = 18$, $AE = 9\sqrt{6}$.

ב. חשבו את אורך המיתר AC.

ג. הוכיחו: $BC \parallel GE$.

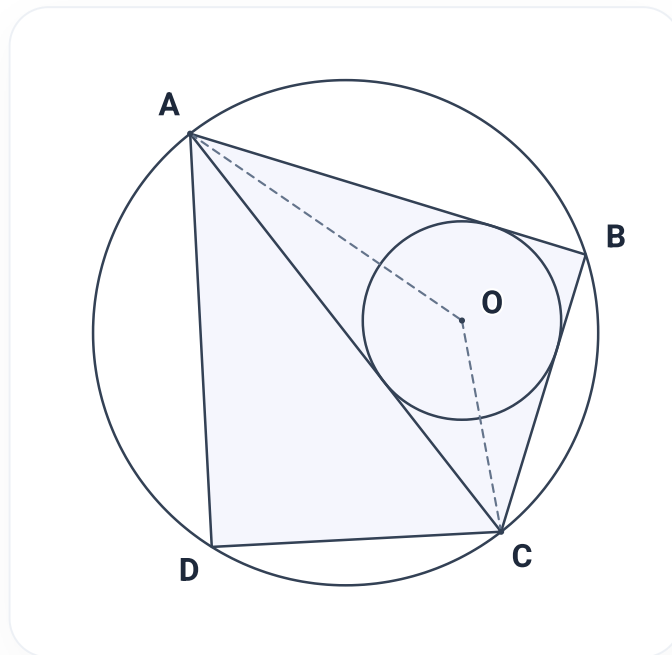
נתון: שטח המשולש ABF גדול פי 2 משטח המשולש BFE.

ד. חשבו את אורך המיתר AB.

ה. מהו היחס בין שטח המשולש ABF ובין שטח המשולש AFC? נמקו את תשובתכם.

שאלה 5 · דלתון חסום במעגל ומרכז המעגל החסום במשולש: משפט הסינוסים, שטח ומרחק בין מרכזים

דלתון $ABCD$ חסום במעגל שרדיוסו R . המיתר AC הוא האלכסון הראשי של הדלתון. הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC (ראו סרטוט). נסמן: $\angle CAB = \alpha$.



א(1). מצאו את זווית המשולש AOC (הביעו באמצעות α במידת הצורך).

א(2). הביעו את אורך הקטע AO באמצעות α ו- R .

נתון כי אורך הקטע AO הוא $R\sqrt{2}$.

ב. מצאו את גודל הזווית α .

נתון כי שטח הדלתון הוא $16\sqrt{3}$.

ג. מצאו את R .

ד. חשבו את המרחק בין מרכז המעגל החסום את הדלתון לבין מרכז המעגל החסום במשולש ABC .

שאלה 6 · פונקציה רציונלית אי-זוגית עם פרמטר, הגרף של $|f(x)| - b$ ופונקציית הצטברות

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2a-x^2}{x}$, המוגדרת עבור $x \neq 0$. a הוא פרמטר חיובי.

הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

א(1). מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים, אם יש כאלה.

א(2). הראו שהפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי זוגית.

א(3). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים, אם יש כאלה.

א(4). מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$, אם יש כאלה.

א(5). מצאו את תחום הקעירות כלפי מעלה ($\cup$) ואת תחום הקעירות כלפי מטה ($\cap$) של הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה גם הפונקציה: $g(x) = |f(x)| - b$, b הוא פרמטר חיובי. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת באותו התחום כמו הפונקציה $f(x)$.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ היא: $(3, -8)$.

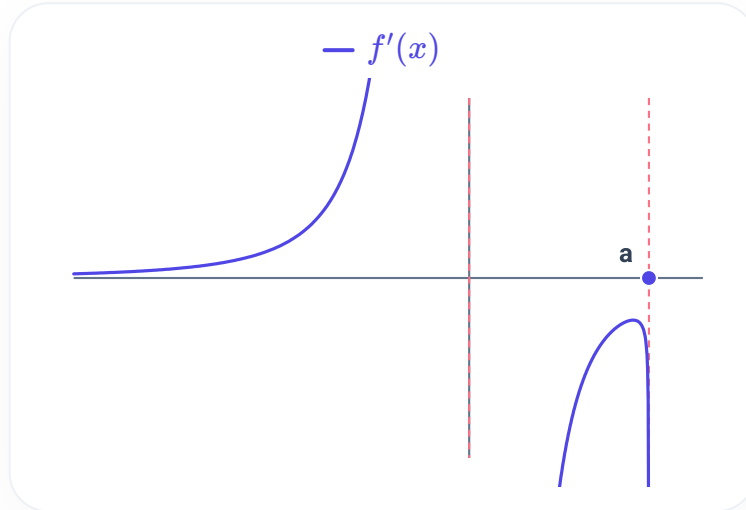
ד. מצאו את הערכים של a ו- b .

נתונה גם הפונקציה: $s(x) = \int_1^x g(t) dt$, המוגדרת בתחום: $1 < x$.

ה. מהו סוג נקודת הקיצון של $s(x)$? נמקו את תשובתכם.

שאלה 7 · פונקציית שורש מתוך גרף הנגזרת: מונוטוניות, פיתול, זיהוי ביטוי, פרמטר משיפוע ושטח

נתונה הפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום: $x \leq a$, $x \neq 0$. a הוא פרמטר חיובי. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$. פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת בתחום: $x < a$, $x \neq 0$. לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש שלוש אסימפטוטות המאונכות לצירים שמשוואותיהן: $x = 0$, $x = a$, $y = 0$. בתחום: $x < 0$. פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עולה. הישר $x = 0$ הוא אסימפטוטה גם לגרף הפונקציה $f(x)$. $f(a) = 0$.



א(1). מצאו את תחום העלייה ואת תחום הירידה של הפונקציה $f(x)$ (הביעו את תשובתכם באמצעות a , אם יש צורך). נמקו.

א(2). כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$? נמקו.

נתון כי הישר: $y = 0$ הוא אסימפטוטה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטוטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$, בהתאם לתשובתכם לתת סעיף א(2).

נתון כי אחד מן הביטויים IV-I שלפניכם מייצג את הפונקציה $f(x)$: I. $\frac{\sqrt{a-x}}{x^2}$ II. $\frac{\sqrt{x-a}}{x^2}$ III. $\frac{\sqrt{a-x}}{x}$ IV. $\frac{\sqrt{x-a}}{x}$.

ג. איזה מן הביטויים IV-I מייצג את הפונקציה $f(x)$? נמקו.

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x = -2$, הוא: $\frac{7}{16}$.

ד. מצאו את הערך של a .

ה. הציבו $a = 2$ וחשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $(f(x))^2$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר: $x = 1$.

שאלה 8 · בעיית קיצון טריגונומטרית במעוין: קטע מקודקוד לאמצע צלע

נתון מעוין $ABCD$. נקודה E היא אמצע הצלע BC . נסמן: $\angle ECD = x$. נתון: שטח המשולש ECD הוא 25.

א. הביעו באמצעות x את אורך צלע המעוין.

ב. חשבו את האורך המינימלי של הקטע DE .

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math