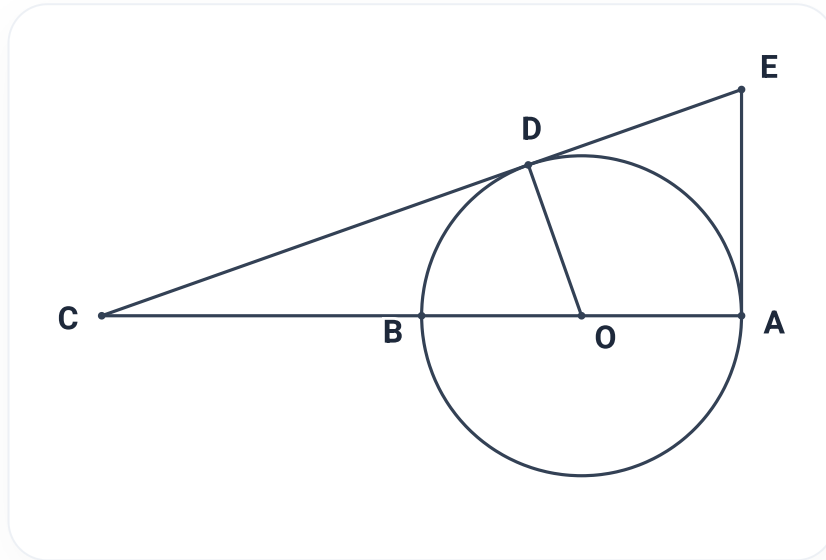


שאלה 1 · שאלות קצרות: אינדוקציה, מרובע בר-חסימה, גרפים של פונקציות שורש, גרף הנגזרת ואינטגרלים

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. בעבור כל n טבעי הוכיחו באינדוקציה או בדרך אחרת כי מתקיים: $\frac{A}{2} + \frac{A}{2^2} + \dots + \frac{A}{2^n} = A \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

הנקודה B היא אמצע הקטע AC. הוא קוטר במעגל שמרכזו O ורדיוסו R. מן הנקודה C מעבירים ישר המשיק למעגל בנקודה D. מנקודה A מעבירים משיק נוסף למעגל. שני המשיקים נחתכים בנקודה E (ראו סרטוט).



ב(1). הוכיחו כי המרובע AODE הוא בר חסימה במעגל.

ב(2). הביעו באמצעות R את רדיוס המעגל החוסם את המרובע AODE.

לפניכם שלוש פונקציות והגרפים א-ד. כל אחת מן הפונקציות מתוארת על ידי אחד מן הגרפים.

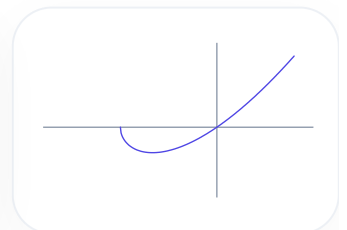
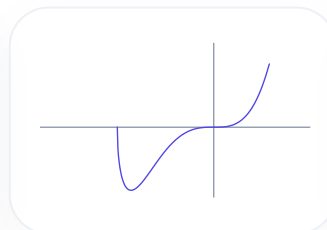
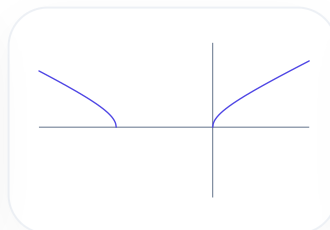
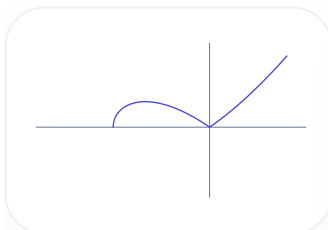
$$k(x) = x\sqrt{x+2}, \quad h(x) = \sqrt{x(x+2)}, \quad f(x) = \sqrt{x^2(x+2)}$$

גרף ד

גרף ג

גרף ב

גרף א



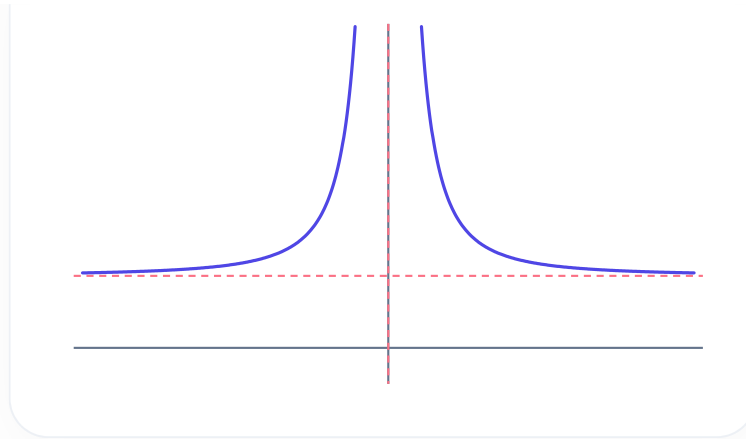
ג(1). בעבור כל אחת מן הפונקציות, קבעו איזה מן הגרפים מתאר אותה. נמקו את קביעותיכם.

נתונה הפונקציה: $g(x) = x^n \sqrt{x+2}$, n הוא פרמטר טבעי גדול מ-1.

ג(2). מצאו עבור אילו ערכים של n , הגרף הנותר מתאר את הפונקציה $g(x)$.

לפניכם גרף של הפונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל $x \neq 0$. הישרים $y = 2$ ו- $x = 0$ הם אסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$. הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה בכל תחום הגדרתה.

$$-f(x)$$



ד(1). סרטוט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ד(2). רשמו את תחומי העלייה והירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה).

נתון: $a > 0$ הוא פרמטר.

ד(3). סדרו את הביטויים (1)-(4) שלפניכם מן הקטן ביותר אל הגדול ביותר (כתבו בצד שמאל את מספרו של הביטוי הקטן ביותר וכן הלאה). (1) $\int_a^{a+1} f(x)dx$ (2) $\int_a^{a+1} f(x)dx$ (3) $\int_{a+1}^{a+2} f(x)dx$ (4) $\int_a^{a+1} f'(x)dx$ המספר 2.

שאלה 2 · סדרה חשבונית בת $3n$ איברים: סכום האיברים האמצעיים ותת-סדרה

נתונה סדרה חשבונית: $a_1, a_2, \dots, a_{3n}$ שבה $3n$ איברים, וההפרש שלה הוא d . נסמן ב- S_n^* את הסכום של n האיברים האמצעיים של הסדרה.

א. הוכיחו כי: $S_n^* = \frac{1}{3} \cdot S_{3n}$.

נתון כי האיבר הראשון של הסדרה הוא חיובי וכי הסכום של n האיברים האמצעיים שווה ל-0.

ב. האם הפרש הסדרה הוא חיובי או שלילי? נמקו את תשובתכם.

ידוע כי מתקיים: $a_1 = 19 \cdot |d|$.

ג. מצאו את מספר האיברים בסדרה.

מוחקים כמה מן האיברים בסדרה הנתונה, ונוצרת סדרה חשבונית חדשה: $a_2, a_5, a_8, \dots, a_{3n-4}$. סכום האיברים של הסדרה החדשה הוא 54.

ד. מצאו את d .

שאלה 3 · הסתברות מותנית בשני הכיוונים: מנויי עיתון בחיפה ובתל אביב

עיתון יומי המופץ למנויים שגרים בחיפה או בתל אביב בלבד, אמור להישלח אל ביתם בכל יום עד השעה 6:00. מערכת העיתון ערכה סקר בקרב המנויים, ושאלה בנוגע ליום מסוים אם הם קיבלו את העיתון בזמן. כל המנויים השתתפו בסקר וכל אחד מהם ענה כן או לא. מספר המנויים של העיתון גדול מאוד. מתוצאות הסקר עולה כי ההסתברות לבחור באקראי מנוי שקיבל את העיתון בזמן מבין המנויים שגרים בחיפה היא $\frac{2}{3}$, וההסתברות לבחור באקראי מנוי שגר בחיפה מבין המנויים שקיבלו את העיתון בזמן היא $\frac{5}{7}$.

נסמן ב- p את ההסתברות שמנוי שנבחר באקראי מבין כל המנויים גר בחיפה. בחרים באקראי אחד מן המנויים.

א. הביעו באמצעות p את ההסתברות שהמנוי שנבחר גר בתל אביב וקיבל את העיתון בזמן.

נתון כי מספר המנויים שגרים בתל אביב ולא קיבלו את העיתון בזמן גדול פי 1.5 ממספר המנויים שגרים בתל אביב וקיבלו את העיתון בזמן.

ב. כמה אחוזים מן המנויים קיבלו את העיתון בזמן?

מבין המנויים שלא קיבלו את העיתון בזמן, בחרים באקראי שני מנויים.

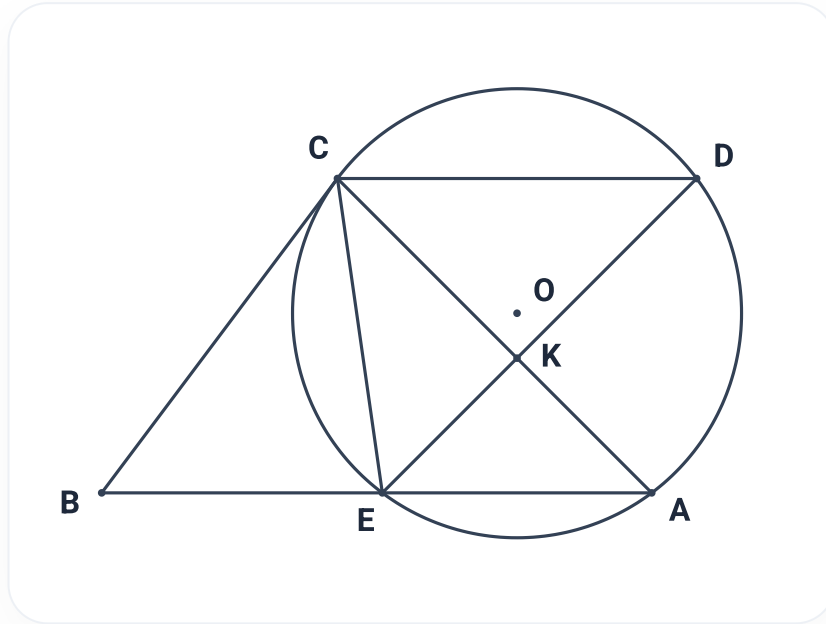
ג. מהי ההסתברות שהראשון שנבחר גר בתל אביב והשני שנבחר גר בחיפה?

באותו היום התקשרו למערכת העיתון 6 מנויים שלא קיבלו את העיתון בזמן.

ד. מהי ההסתברות שלכל היותר 4 מהם גרים בחיפה?

שאלה 4 · משיק, מיתרים מקבילים ודמיון: יחסי שטחים ונקודות על מעגל

מנקודה B, שמחוץ למעגל, העבירו ישר שמשיק למעגל בנקודה C, וישר אחר שחותך את המעגל בנקודות E ו-A, כמתואר בסרטוט. הנקודה D נמצאת על המעגל כך שהמיתר CD מקביל למיתר EA. המיתרים ED ו-AC נחתכים בנקודה K.



א. הוכיחו: $\triangle CEB \sim \triangle DCE$.

נתון: $ED = 7$, $AK = 3$. נסמן את שטח המשולש CEK ב- S .

ב. הביעו באמצעות S את שטח המשולש CKD.

נתון: $BC = \frac{35}{\sqrt{32}}$.

ג. הביעו באמצעות S את שטח המשולש CEB.

הנקודה O היא מרכז המעגל.

ד. הוכיחו: $\angle COE = \angle CKE$.

נתון: $\angle CAE = 45^\circ$.

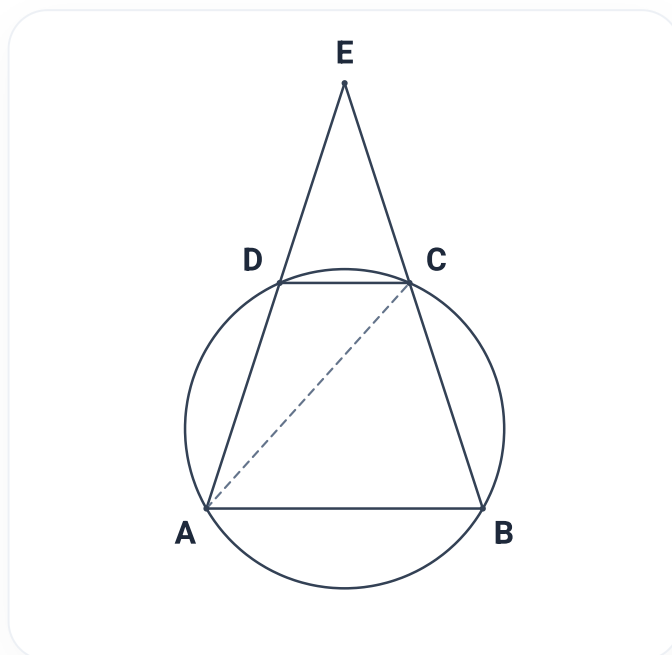
ה. הסבירו מדוע הנקודות E, C, O ו-K נמצאות על מעגל אחד.

שאלה 5 · טרפז חסום במעגל והמשכי השוקיים: משפט הסינוסים, יחס שטחים ותיכון

נתון טרפז ABCD ($AB \parallel DC$), החסום במעגל. המשכי הצלעות AD ו-BC נפגשים בנקודה E, כמתואר בסרטוט.

נתון: $\angle ACB = 60^\circ$.

נסמן: $\angle CDE = \alpha$, $AC = k$.



א(1). מצאו את זוויות המשולש ACE (הביעו באמצעות α אם יש צורך).

א(2). הביעו באמצעות α ו- k את אורכי הצלעות AB ו-DC.

נתון כי שטח המשולש ABE גדול פי 3 משטח המשולש DCE.

ב. מצאו את גודל הזווית α .

ג. מצאו את הערך של k שבעבורו אורך התיכון לצלע EC במשולש AEC הוא $\sqrt{63}$.

שאלה 6 · פונקציה רציונלית עם פרמטר: חקירה, גרף שנמצא מעל גרף אחר ושטח ביניהם

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{(x-3)^2}$, $0 < a < 3$ הוא פרמטר.

ענו על התת-סעיפים (1)-(5). הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

א(3). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

א(4). מצאו את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

א(5). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{x^2}{(x-3)^2}$, המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקציה $f(x)$.

ב(1). הוכיחו כי גרף הפונקציה $g(x)$ נמצא כולו מעל גרף הפונקציה $f(x)$.

ב(2). הביעו באמצעות a את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, על ידי הישר $x = 1$ ועל ידי ציר ה- y .

שאלה 7 · פונקציה עם שורש במכנה: אסימפטוטות שונות ב- $\pm\infty$, זיהוי גרף f'' ושטח מתחתיו

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2+x}}$.

בסוף השאלה מופיעים ארבעה גרפים, I-IV:



א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). האם גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את הצירים? נמקו את תשובתכם.

א(3). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

א(4). מצאו את תחום העלייה ואת תחום הירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. היעזרו בגרף הפונקציה $f(x)$, וקבעו איזה מן הגרפים I-IV שבסוף השאלה מתאר את גרף הנגזרת השנייה $f''(x)$. נמקו את קביעתכם.

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים: $x = 1$ ו- $x = 2$.

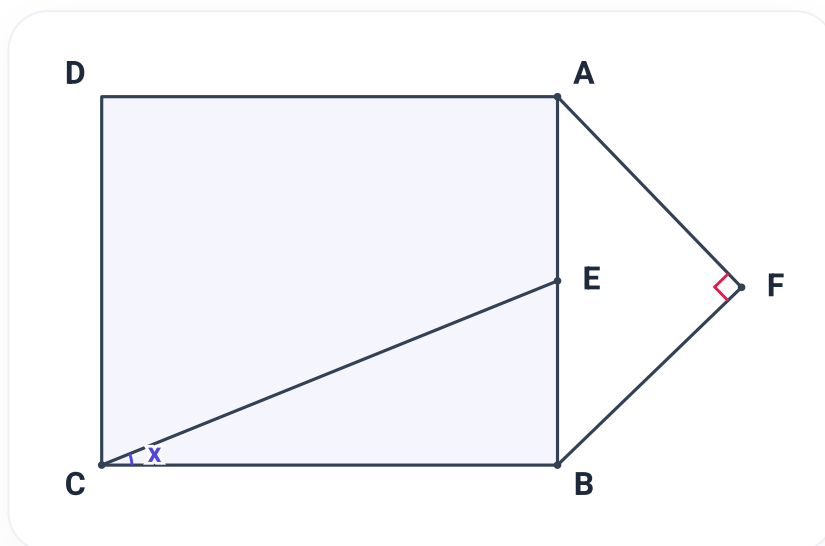
שאלה 8 · בעיית קיצון טריגונומטרית: הפרש קטעים במלבן ובמשולש ישר זווית

הנקודה E היא אמצע הקטע AB.

על הקטע AB בונים מלבן ABCD ומשולש ישר זווית AFB, $\angle AFB = 90^\circ$, כמתואר בסרטוט.

נתון: $\angle ECB = x$, $\angle FAB = 2x$.

נסמן את אורך הקטע AB ב- h .



א. מהו תחום הערכים האפשרי בעבור x ? הסבירו את תשובתכם.

ב. הביעו באמצעות x ו- h את ההפרש בין אורך הקטע CE לאורך הקטע AF.

ג. מצאו את הערך של x שבעבורו ההפרש בין אורך הקטע CE לאורך הקטע AF הוא מינימלי.

ד. בעבור הערך של x שמצאתם בסעיף ג, מצאו את היחס בין שטח המלבן ABCD לשטח המשולש AFB.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math