

בגרות במתמטיקה - שאלון 571

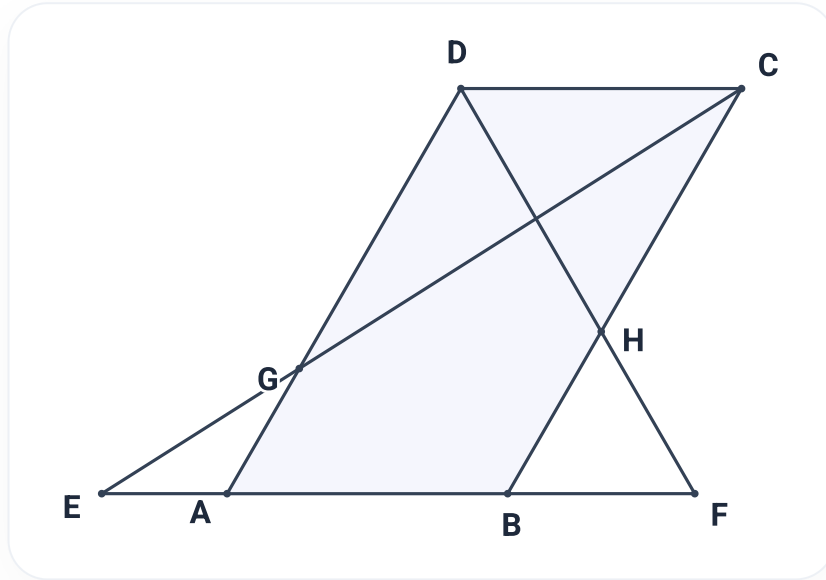
קיץ 2023 מועד מיוחד (תשפ"ג)

5 יח"ל · שאלון 035571 · 8 שאלות

שאלה 1 · שאלות קצרות: רדיוסים של מעגלים חוסמים, ביטוי ברנולי, גרפי f' ו- f'' , סדרת זוויות אין-סופית

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

בסרטוט שלפניכם מקבילית $ABCD$. הנקודות E ו- F נמצאות על המשכי הצלע AB , כמתואר בסרטוט. הקטע EC חותך את הצלע AD בנקודה G . הקטע FD חותך את הצלע BC בנקודה H . נתון: $HF = 4$, $GE = 5$.



א(1). מצאו את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את משולש HBF ובין רדיוס המעגל החוסם את משולש GEA . נמקו את תשובתכם.

נתון: המרובע $ABHD$ הוא בר-חסימה במעגל, $BH = FH$.

א(2). הוכיחו כי המשולש HBF הוא שווה צלעות.

ב. ביישוב מסוים ההסתברות לבחור באקראי גבר היא 0.2, וההסתברות לבחור באקראי אישה היא 0.8. בוחרים באקראי 4 אנשים מיישוב זה.

לפניכם שני ביטויים:

$$\text{ביטוי 1: } 1 - 0.2^4 - 0.8^4$$

$$\text{ביטוי 2: } 0.2^4 + \binom{4}{3} \cdot 0.2^3 \cdot 0.8$$

קבעו איזו מן ההסתברויות I-II שלפניכם אפשר לחשב על ידי ביטוי 1 ואיזו מהן אפשר לחשב על ידי ביטוי 2.

I. ההסתברות לבחור באקראי יותר גברים מנשים.

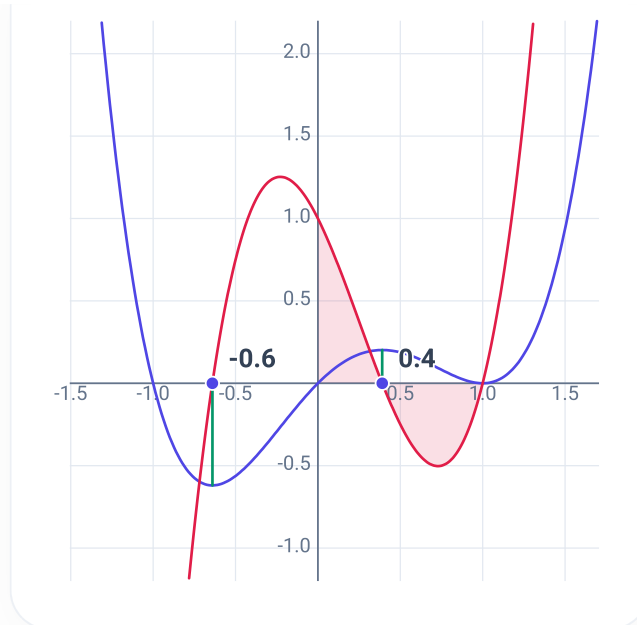
II. ההסתברות לבחור באקראי יותר נשים מגברים.

III. ההסתברות לבחור באקראי לפחות גבר אחד ולפחות אישה אחת.

$f(x)$ היא פונקציה. בסרטוט שלפניכם מוצגים שני גרפים: גרף I וגרף II. אחד הגרפים הוא של פונקציית הנגזרת

$f'(x)$, והגרף האחר הוא גרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$.

— I — II

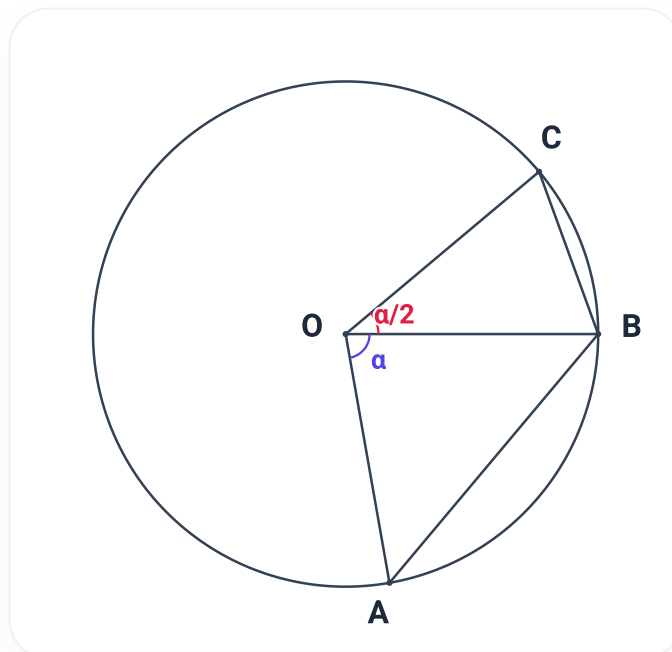


ג(1). איזה גרף הוא של $f'(x)$, ואיזה גרף הוא של $f''(x)$? נמקו.

ג(2). הוכיחו שהשטח המוגבל על ידי גרף II ועל ידי ציר ה- x ברביע הרביעי שווה לשטח המוגבל על ידי גרף II, על ידי ציר ה- x ועל ידי ציר ה- y ברביע הראשון.

במעגל שמרכזו O בונים סדרה אין-סופית של משולשים שווים שוקיים. זוויות הראש של המשולשים הן זוויות מרכזיות במעגל, ושוקי המשולשים הם רדיוסים במעגל.

זווית הראש של המשולש הראשון ($\triangle AOB$) היא α . זווית הראש של המשולש השני ($\triangle BOC$) היא $\frac{\alpha}{2}$, כמתואר בסרטוט.



ממשיכים לבנות משולשים שווים שוקיים כך שזווית הראש של כל משולש נוסף בסדרה קטנה פי 2 מזווית הראש של המשולש שלפניו.

נתון: סכום כל זוויות הראש של כל המשולשים בסדרה הוא 240° .

מצאו את α .

ד(1).

ד(2). האם שטחי כל המשולשים האלה הם סדרה הנדסית? נמקו את תשובתכם.

שאלה 2 · סדרה חשבונית וסדרת הממוצעים של איברים סמוכים: הפרש, יחס סכומים ואיברים אמצעיים

נתונה סדרה חשבונית A ובה $2n$ איברים (n הוא מספר טבעי). d הוא הפרש הסדרה ($d \neq 0$).

מגדירים סדרה נוספת B באופן הזה: $b_t = \frac{a_t + a_{t+1}}{2}$.

בסדרה B יש $2n - 1$ איברים.

א. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה חשבונית, והביעו באמצעות d את ההפרש שלה.

נסמן ב- S_A את סכום האיברים בסדרה A. נסמן ב- S_B את סכום האיברים בסדרה B.

ב. הוכיחו: $\frac{S_A}{2n} = \frac{S_B}{2n-1}$.

נתון: $S_A = 220 + S_B$, $S_A = \frac{66}{65} \cdot S_B$.

ג(1). מצאו את n .

ג(2). מצאו את סכום שני האיברים האמצעיים בסדרה A.

שאלה 3 · עץ-דו-שלבי תלוי עם פרמטר: מבחני קבלה, הסתברות מותנית וניסוי חוזר עם שלוש תוצאות

כדי להתקבל ללימודים בפקולטה מסוימת מועמד צריך להיבחן בשני מבחנים.

ההסתברות שמועמד יצליח במבחן הראשון היא P ($P > 0.5$).

אם המועמד הצליח במבחן הראשון, אז ההסתברות שהוא יצליח במבחן השני היא: $P + 0.1$.

אם המועמד נכשל במבחן הראשון, אז ההסתברות שהוא יצליח במבחן השני היא: $P - 0.4$.

נתון כי ההסתברות שהמועמד יצליח בדיוק במבחן אחד מבין השניים היא $\frac{1}{4}$.

א. מצאו את P .

כדי להתקבל ללימודים בפקולטה המועמד צריך להצליח בשני המבחנים.

ב. ידוע כי מועמד הצליח לפחות במבחן אחד. מהי ההסתברות שהוא התקבל לפקולטה?

שלושה מועמדים נבחנו בשני המבחנים.

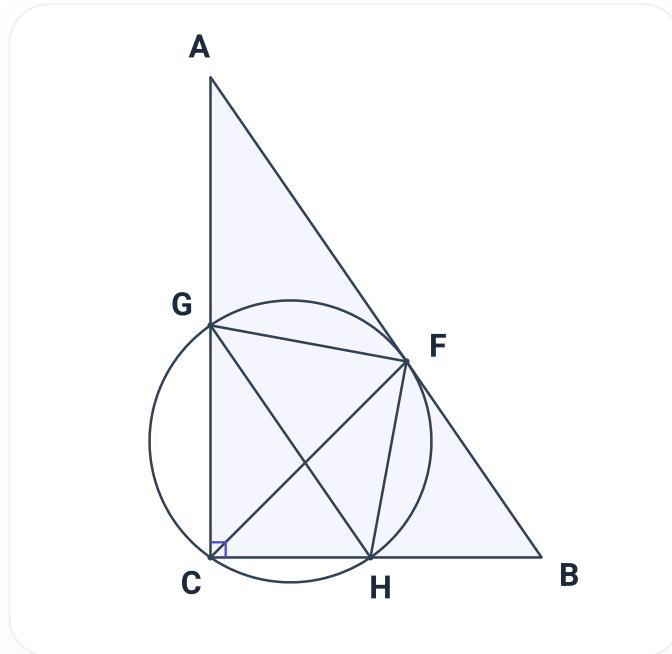
ג. מהי ההסתברות ששני מועמדים מבין השלושה התקבלו לפקולטה ואחד מהם נכשל בשני המבחנים?

n מועמדים נבחנו בשני המבחנים ($n \geq 2$).

ד. הביעו באמצעות n את ההסתברות שלפחות מועמד אחד התקבל לפקולטה וגם לפחות מועמד אחד לא התקבל לפקולטה.

שאלה 4 · מעגל דרך קודקוד הזווית הישרה המשיק ליתר: מיתרים שווים, חוצה זווית, דמיון ומרובע בר-חסימה

המשולש ABC הוא משולש ישר זווית, $\angle ACB = 90^\circ$. הנקודות G , H ו- F נמצאות על הצלעות AC , CB ו- AB בהתאמה, כך שהמרובע $GCHF$ חסום במעגל (ראו סרטוט). נתון: AB משיק למעגל בנקודה F , $GH \parallel AB$.



א. הוכיחו: $FG = FH$.

ב(1). מצאו את גודל הזווית $\angle ACF$.

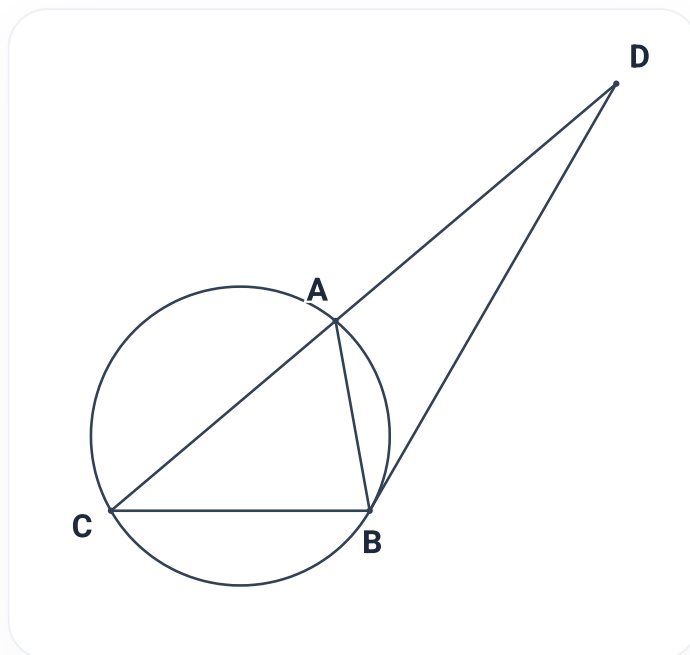
ב(2). הוכיחו: $\triangle GFC \sim \triangle FBC$.

קוטר המעגל היוצא מנקודה F חותך את הצלע AC בנקודה E .

ג. הוכיחו: $\angle FEB = \angle FCB$.

שאלה 5 · משיק וחותר במעגל: משפט הסינוסים המורחב, יחס שטחים ורדיוס מעגל חסום

המשולש ABC חסום במעגל שהרדיוס שלו הוא R . המשיק למעגל בנקודה B חותך את המשך הצלע CA בנקודה D , כמתואר בסרטוט. נסמן: $\angle ABD = \alpha$. נתון: $\angle DBC = 120^\circ$.



א. הביעו את אורכי הצלעות AB ו- BC באמצעות R ו- α , אם יש צורך.

נתון: היחס בין שטח המשולש BDC ובין שטח המשולש BDA הוא 1.8.

ב. מצאו את α .

נתון כי רדיוס המעגל החסום במשולש BDA הוא 6.

ג. מצאו את R .

שאלה 6 · חקירת $\sin x \cos^3 x$, הפונקציה $\frac{1}{\sqrt{f}}$ ומרחק מינימלי בין הגרפים

נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin(x) \cdot \cos^3(x)$ המוגדרת בתחום: $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

א(1). האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי זוגית? נמקו.

א(2). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

א(3). מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

א(4). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$.

ב(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ב(2). מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

ב(3). סרטטו (בקו מקווקו) סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ באותה מערכת צירים שבה סרטטתם את גרף הפונקציה $f(x)$.

ענו על סעיף ג בעבור התחום שבו מוגדרות שתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

ג. מצאו את המרחק המינימלי בין הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

שאלה 7 · חקירת $x + \sqrt{x^2 - 9}$, השיקוף $-f(-x)$ והשוואת אינטגרלים

נתונה הפונקציה: $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 9}$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x (אם יש כאלה).

א(3). מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

א(4). מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה ($\cup$) וכלפי מטה ($\cap$) של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $h(x) = -f(-x)$. הפונקציות $f(x)$ ו- $h(x)$ מוגדרות באותו תחום.

ג. באותה מערכת צירים שבה סרטטתם סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, הוסיפו בקו מקווקו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.

נתון: $a > 5$ הוא פרמטר.

ד. סדרו את הביטויים I-III שלפניכם מן הקטן ביותר אל הגדול ביותר (כתבו בצד שמאל את מספרו של הביטוי הקטן ביותר וכן הלאה).

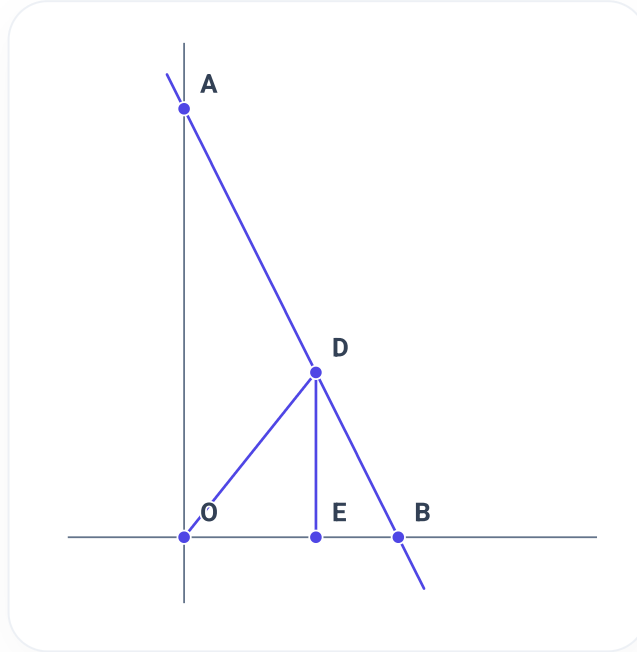
I. $\int_a^{a+1} (f(x) - h(x)) dx$

II. $\int_{a+1}^{a+2} (f(x) - h(x)) dx$

III. $\int_{-a+1}^{-a+2} (f(x) - h(x)) dx$

שאלה 8 · בעיית קיצון: יחס שטחים של משולשים בין ישר לצירים

ישר ששיפועו -2 חותך את החלק החיובי של ציר ה- x בנקודה B , ואת החלק החיובי של ציר ה- y בנקודה A . הנקודה D נמצאת על הישר AB ברביע הראשון. הנקודה E נמצאת על ציר ה- x כך שהקטע DE מקביל לציר ה- y . הנקודה O היא ראשית הצירים, כמתואר בסרטוט. נסמן את אורך הקטע OE ב- p . נתון: שטח המשולש OED הוא $\frac{p}{2}$.



א. הביעו באמצעות p את משוואת הישר AB .

ב. מצאו את הערך של p שבעבורו היחס בין שטח המשולש OED ובין שטח המשולש ABO הוא מקסימלי.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math