

בגרות במתמטיקה - שאלון 571

קיץ 2024 מועד א' (תשפ"ד)

5 יח"ל · שאלון 035571 · 8 שאלות

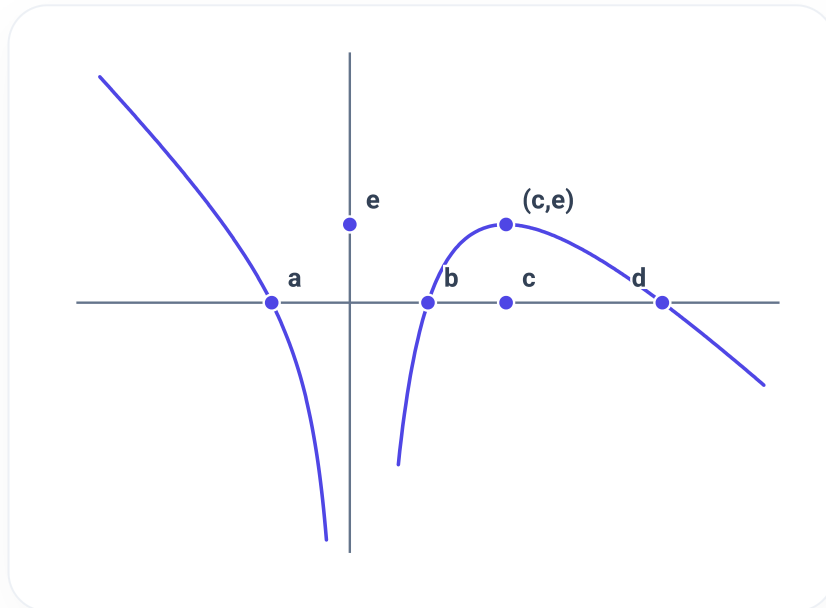
שאלה 1 · שאלות קצרות: אינדוקציה, $f'' - e = h'$, ערך מוחלט עם פרמטר, דמיון במרובע חסום

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקציה מתמטית או בדרך אחרת כי השוויון שלפניכם מתקיים בעבור כל n טבעי:

$$4 + 13 + \dots + \frac{5n^2 + 3n}{2} = \frac{n(n+1)(5n+7)}{6}$$

נתונות הפונקציות: $f(x)$, $f'(x)$ ו- $f''(x)$, המוגדרות לכל $x \neq 0$. בסרטוט שלפניכם מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$. לגרף הפונקציה $f''(x)$ יש שלוש נקודות חיתוך עם ציר ה- x , ושיעוריהן הם: $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(d, 0)$. הנקודה (c, e) היא נקודת הקיצון של הפונקציה $f''(x)$.

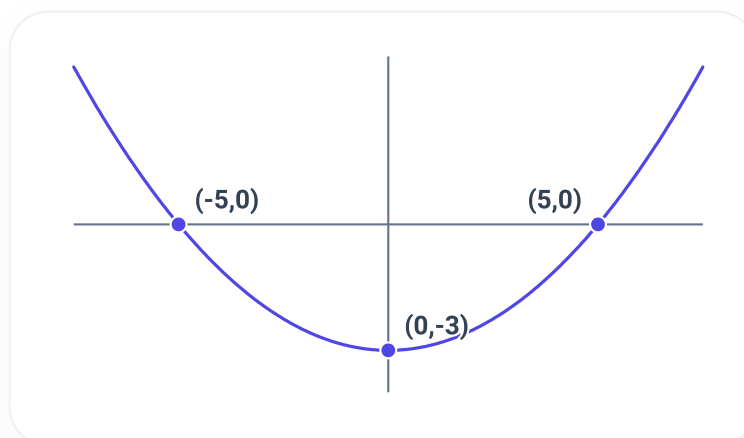


ב(1). הביעו באמצעות a , b , c , d , e , אם יש צורך, את תחומי העלייה והירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתונה הפונקציה $h(x)$, המקיימת: $h'(x) = f''(x) - e$. הפונקציה $h(x)$ מוגדרת לכל $x \neq 0$.

ב(2). מצאו כמה נקודות קיצון וכמה נקודות פיתול יש לפונקציה $h(x)$ (אם יש כאלה). נמקו את תשובתכם.

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$, ועליו כתובים כל שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x ושיעורי נקודת המינימום שלה. הפונקציה מוגדרת לכל x .



נתונות הפונקציות: $g(x) = |f(x) + m|$, $h(x) = |f(x)| + m$. m הוא פרמטר, $0 < m < 2$.

ג(1). הביעו באמצעות m , אם יש צורך, את שיעורי נקודת המקסימום של הפונקציה $g(x)$.

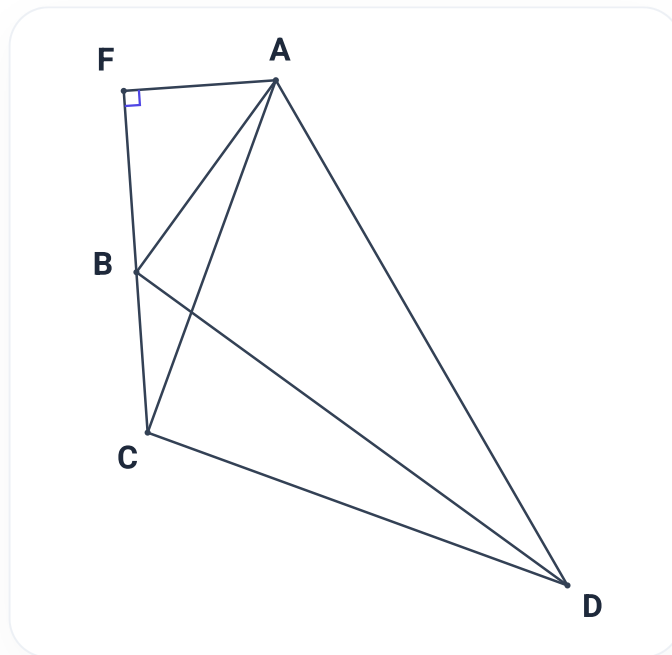
ג(2). הביעו באמצעות m , אם יש צורך, את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$, וקבעו את סוגן.

ג(3). לפניהם שתי טענות, II-I. קבעו בעבור כל טענה אם היא נכונה או אינה נכונה. נמקו את קביעותיכם.

I. הפונקציות $g(x)$ ו- $h(x)$ חיוביות לכל ערך של x .

II. לכל ערך של m בתחום: $0 < m < 2$ מתקיים שהישר: $y = m + \frac{1}{2}$ חותך כל אחת מן הפונקציות $g(x)$ ו- $h(x)$ בשלוש נקודות.

המרובע ABCD הוא בר חסימה במעגל, כך ש-AD הוא קוטר במעגל. הנקודה F נמצאת על המשך הצלע CB, כך ש- $FB \perp FA$, כמתואר בסרטוט שלפניהם.



ד(1). הוכיחו: $\triangle ACD \sim \triangle AFB$.

נתון: $\angle BDA = 24^\circ$.

ד(2). מצאו את היחס בין שטח המשולש ACD ובין שטח המשולש AFB.

שאלה 2 · סדרה הנדסית עם מנה שלילית: סדרת מכפלות, מונוטוניות, סכום אינסופי וסכום מאמצע הסדרה

הסדרה A היא סדרה הנדסית שאיבריה הם: $a_1, a_2, a_3, \dots$ ומנתה היא q , $-1 < q < 0$. נתון: $a_1 = 1$.
הסדרה B מוגדרת לכל n טבעי באופן הזה: $b_n = a_n \cdot a_{n+2}$.

א. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, והביעו את מנתה באמצעות q .

ב. לפניכם שלוש טענות I-III. קבעו עבור כל טענה אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעותיכם.

I. הסדרה A לא עולה ולא יורדת.

II. הסדרה B היא סדרה עולה.

III. האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה A יוצרים סדרה עולה.

נתון: הסדרה B היא סדרה אין-סופית שסכומה הוא $\frac{1}{8}$.

ג. מצאו את ערכו של q .

נתונה סדרה הנדסית נוספת C, המוגדרת לכל n טבעי באופן הזה: $c_n = \frac{a_n}{b_n}$. נתון:

$$c_3 + c_4 + \dots + c_m = 44,307, \text{ הוא מספר טבעי.}$$

ד. מצאו את הערך של m .

שאלה 3 · ברנולי: חידון עם ניקוד שונה לכל שאלה - מציאת p, ניקוד מצטבר והסתברות מותנית

בחידון יש 5 שאלות. ההסתברות לענות נכון על כל אחת מן השאלות היא P. ידוע כי ההסתברות שמתמודד בחידון יענה נכון על 4 שאלות לכל היותר היא 0.67232.

א. מצאו את P.

ב. מצאו את ההסתברות שמתמודד בחידון יענה נכון על 3 שאלות בדיוק.

מספר הנקודות הניתן לכל שאלה זהה למספר השאלה.

כלומר מתמודד שענה נכון על שאלה 1, מקבל נקודה אחת. מתמודד שענה נכון על שאלה 2 מקבל שתי נקודות, וכן הלאה.

ג. מצאו את ההסתברות שמתמודד יצבור 14 נקודות לפחות.

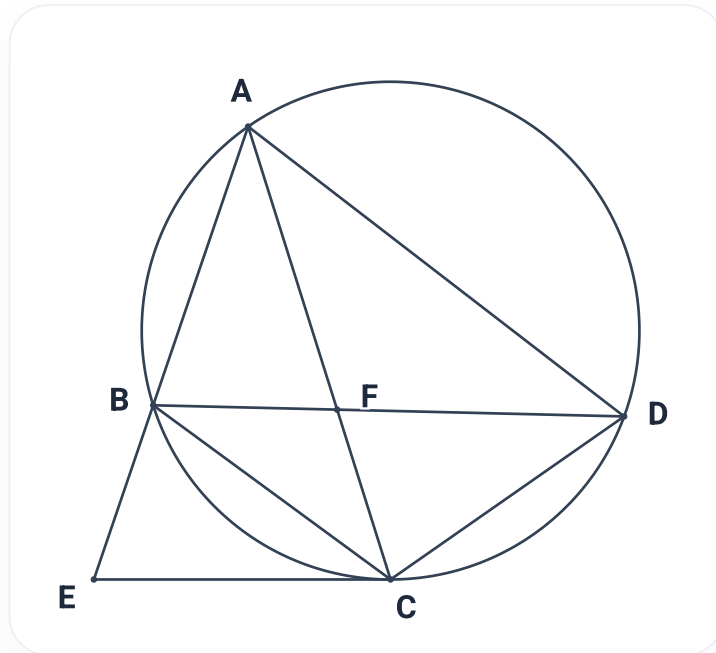
ד. מצאו את ההסתברות שמתמודד בחידון יצבור 6 נקודות בדיוק.

ידוע כי אחינועם ענתה נכון על 3 שאלות בדיוק.

ה. מצאו את ההסתברות שהיא צברה 6 נקודות בדיוק.

שאלה 4 · מרובע חסום ומשיק: זוויות היקפיות, משפט הסינוסים עם זווית משולשת ויחסי שטחים

המרובע ABCD חסום במעגל. אלכסוני המרובע נחתכים בנקודה F. המשיק למעגל בנקודה C חותך את המשך המיתר AB בנקודה E (ראו סרטוט). נתון: $AB = CB$.



א. הוכיחו: $\angle EBC = 2 \cdot \angle BDC$.

נתון: AC חוצה את זווית ECD, $\frac{CD}{CF} = \frac{8}{5}$.

ב(1). הוכיחו: $AC = AD$.

ב(2). מצאו את היחס: $\frac{AD}{CD}$.

ב(3). מצאו את היחס בין שטח המשולש ABF ובין שטח המשולש CBF.

נסמן את שטח המשולש ABF ב- S .

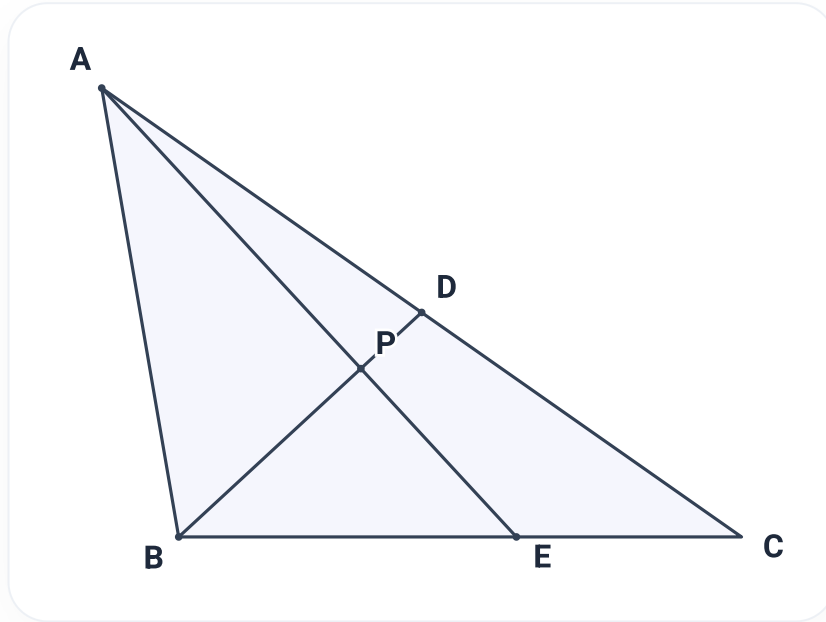
ג. הביעו באמצעות S את שטח המשולש AEC.

שאלה 5 · תיכון וחותר מאונכים במשולש: משפט הסינוסים, זווית כפולה ורדיוסי מעגלים חוסמים

במשולש ABC , BD הוא תיכון לצלע AC . הנקודה E נמצאת על הצלע BC . BD ו- AE נחתכים בנקודה P (ראו סרטוט).

נתון: $BP = 3 \cdot PD$.

נסמן: $AB = k$, $\angle BAP = \alpha$, $\angle ABP = \beta$, $\alpha < \beta$.



א. הביעו באמצעות α , β ו- k את אורכי הקטעים AP ו- BP .

נתון כי AE ו- BD מאונכים זה לזה, וכי שטח המשולש ABD הוא $0.28k^2$.

ב. מצאו את גודל הזווית α .

ג. מצאו את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש AEC ובין רדיוס המעגל החוסם את המשולש AEB .

שאלה 6 · פונקציה רציונלית עם פרמטר: חקירה, פונקציה קדומה ומכפלה

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{6x}{(x^2-a)^2}$, a הוא פרמטר חיובי.

ענו על סעיפים א-ה. הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

א(3). מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

היא פונקציה המקיימת: $g'(x) = f(x)$. גרף הפונקציה $g(x)$ עובר בנקודה $(0,0)$. הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות באותו התחום.

ג. מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה $g(x)$.

ד(1). מצאו פונקציה $g(x)$ המקיימת תנאים אלו.

ד(2). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ שמצאתם בת-סעיף ד(1).

היא פונקציה המוגדרת כך: $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. הפונקציות $f(x)$ ו- $h(x)$ מוגדרות באותו התחום.

ה(1). מצאו את משוואות האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה $h(x)$.

ה(2). מצאו את תחומי החיוביות של הפונקציה $h(x)$.

שאלה 7 · חקירת $\cos x - \sqrt{\cos x}$: קיצון בקצוות, גרף הנגזרת ושטח בעזרת זוגיות

נתונה הפונקציה: $f(x) = \cos x - \sqrt{\cos x}$, בתחום: $-\pi \leq x \leq \pi$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). הראו כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

א(3). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

א(4). מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן (בתשובתכם דייקו 2 ספרות אחרי הנקודה העשרונית).

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

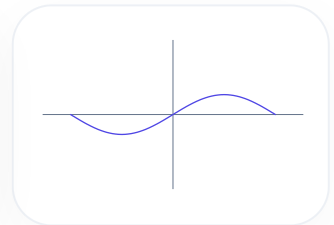
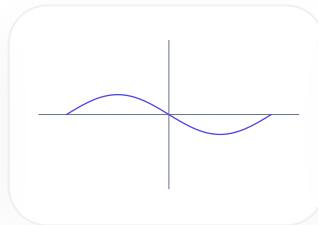
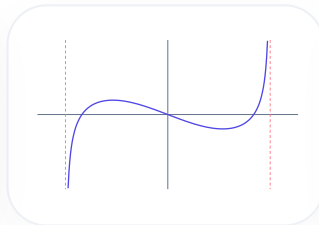
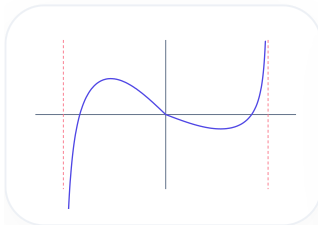
ד. קבעו איזה מן הגרפים I-IV שלפניכם מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

גרף IV

גרף III

גרף II

גרף I



נתונה הפונקציה: $g(x) = k - f(x)$, k הוא פרמטר חיובי. הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות באותו התחום.

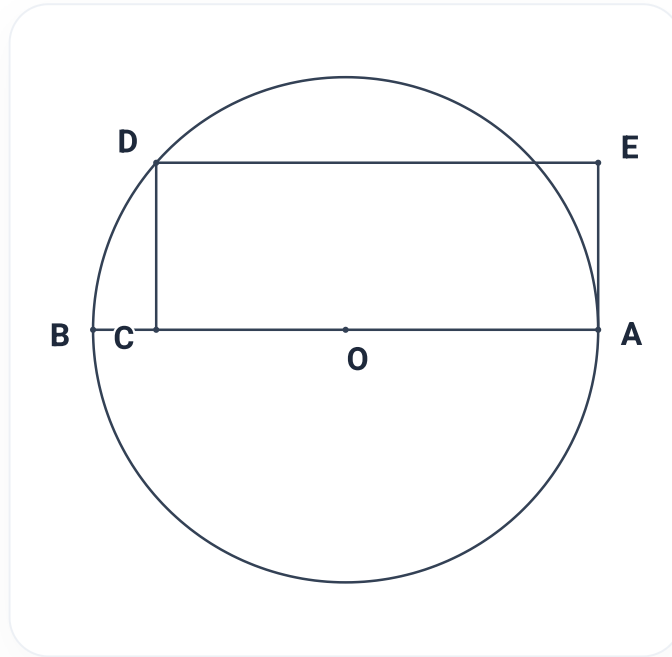
נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x בתחום בין 0 ל- $\frac{\pi}{2}$. נתון כי השטח

המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ ועל ידי הישרים $x = -\frac{\pi}{2}$ ו- $x = \frac{\pi}{2}$ הוא $14 \cdot S$.

ה. הביעו את k באמצעות S .

שאלה 8 · מלבן בין קוטר, משיק ומעגל: שטח מקסימלי וסכום שטחי משולשים

הקטע AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R . מסמנים על הקוטר נקודה C ועל המעגל מסמנים נקודה D , כך שהקטע CD מאונך לקטע AB . הקטע AC גדול מ- R . דרך הנקודה D מעבירים ישר שמקביל לקוטר AB . דרך הנקודה A מעבירים משיק למעגל. הישר המקביל והמשיק נחתכים בנקודה E (ראו סרטוט). נסמן: $AC = x$.



א. הביעו באמצעות R את הערך של x שבעבורו שטח המלבן $ACDE$ מקסימלי.

הנקודה F נמצאת על הצלע DE .

ב. הביעו באמצעות R את סכום השטחים המקסימלי של המשולשים CDF ו- AFE .

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math