

שאלה 1 · שאלות קצרות: אינדוקציה, רדיוסים של מעגלים חוסמים, פונקציה אי-זוגית ונגזרת, שורש של

פולינום

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א(1). הוכיחו באינדוקציה מתמטית או בדרך אחרת כי השוויון שלפניכם מתקיים בעבור כל n טבעי:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

א(2). האם הביטוי: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)$ שווה ל- $\frac{n+1}{n}$ בעבור כל n טבעי? נמקו את תשובתכם.

המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O. נסמן: $\angle ACB = \alpha$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

ב(1). הביעו באמצעות α את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את משולש ABC, ובין רדיוס המעגל החוסם את משולש AOB.

נתון כי היחס שהבעתם בתת-סעיף (1) שווה ל- $\sqrt{2}$, וכי הצלע CB משיקה למעגל החוסם את משולש AOB.

ב(2). הוכיחו כי מרכז המעגל O נמצא על הצלע AC.

נתון כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית ורציפה המוגדרת לכל x . לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מינימום אחת בלבד ובה: $x = -\frac{1}{2}$. אחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x היא בנקודה $(1, 0)$.

ג(1). סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון כי הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה זוגית המוגדרת לכל x . פונקציית הנגזרת $g'(x)$ מקיימת:
 $g'(x) = -f(x)$. נתון: $g(1) = 2$.

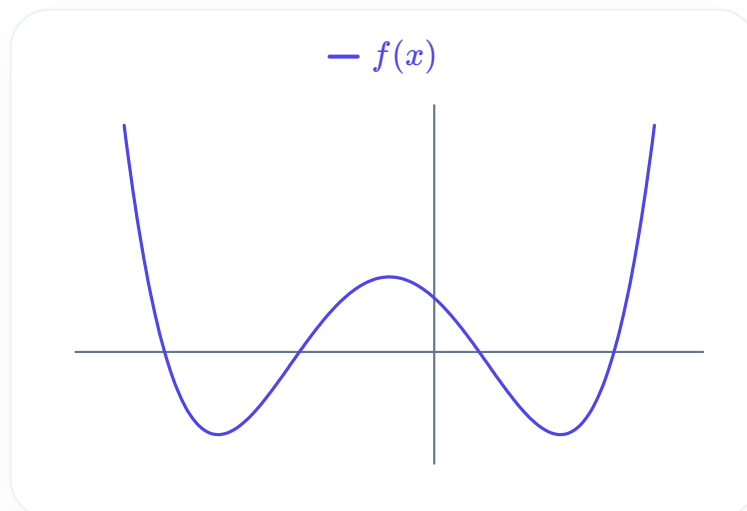
ג(2). מצאו את שיעורי נקודות המינימום של הפונקציה $g(x)$.

ג(3). לפניכם שני היגדים I-II. קבעו עבור כל היגד אם הוא נכון או לא נכון. נמקו את קביעותיכם.

I. שיעור ה- y של נקודת המקסימום של הפונקציה $g(x)$ הוא בין 0 ל-2.

II. הפונקציה $g(x)$ חיובית לכל x .

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x . אחד מן הביטויים I-IV שלפניכם מייצג את הפונקציה $f(x)$.



ד(1). קבעו איזה מן הביטויים מייצג את הפונקציה $f(x)$, נמקו את קביעתכם:

I. $f(x) = x(x-4)(x+6)$

II. $f(x) = x(x-1)(x+3)(x+6)$

III. $f(x) = (x-4)(x-1)(x+3)(x+6)$

IV. $f(x) = (x-4)(x+1)(x+3)(x+6)$

נתונה הפונקציה: $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

ד(2). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ד(3). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתון: $\int_4^7 g(x) dx = k$

ד(4). הביעו באמצעות k את הערך של: $\int_5^8 [2 \cdot g(x-1) + 1] dx$.

שאלה 2 · סדרה הנדסית בת $2n + 1$ איברים, סדרה נגזרת וסכומים אין-סופיים במקומות זוגיים ואי-זוגיים

נתונה סדרה הנדסית שבה: $2n + 1$ איברים (n הוא מספר טבעי). כל איברי הסדרה: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n+1}$ הם חיוביים.

סכום איברי הסדרה ללא שני האיברים הראשונים גדול פי 4 מסכום איברי הסדרה ללא שני האיברים האחרונים.

נתון כי סכום האיברים שנמצאים אחרי האיבר האמצעי גדול פי 256 מסכום האיברים שנמצאים לפני האיבר האמצעי.

א. מצאו את n .

המשיכו את הסדרה הנתונה, כך שנוצרה סדרה הנדסית אין-סופית. נתון: B היא סדרה אין-סופית המקיימת לכל k

טבעי: $b_k = \frac{1}{(a_k + a_{k+1})^2}$.

ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, ומצאו את מנתה.

בסדרה B כופלים כל איבר שנמצא במקום זוגי ב-2. נתון כי לאחר ההכפלה, סכום האיברים שנמצאים במקומות האי-זוגיים גדול ב- $\frac{1}{30}$ מסכום האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים.

ג. מצאו את a_1 .

שאלה 3 · הסתברות: תנועת נוער והתנדבות - משלים, טבלה דו-ממדית והוצאה ללא החזרה

במחקר שנעשה בקרב תלמידים בבית ספר מסוים נבדק הקשר בין חברות בתנועת נוער ובין התנדבות בקהילה. 80% מן החברים בתנועת נוער מתנדבים בקהילה.

א. בוחרים באקראי 5 תלמידים שחברים בתנועת נוער (הוצאה עם החזרה). מהי ההסתברות שבחרו לפחות תלמיד אחד שמתנדב ולפחות תלמיד אחד שאינו מתנדב?

נתון כי 55% מן התלמידים אינם חברים בתנועת נוער ואינם מתנדבים, ו- $\frac{1}{12}$ מן התלמידים שאינם חברים בתנועת נוער מתנדבים.

ב. כמה אחוזים מן התלמידים חברים בתנועת נוער?

במחקר השתתפו 100 תלמידים סך הכול.

ג. כמה מן התלמידים חברים בתנועת נוער ואינם מתנדבים?

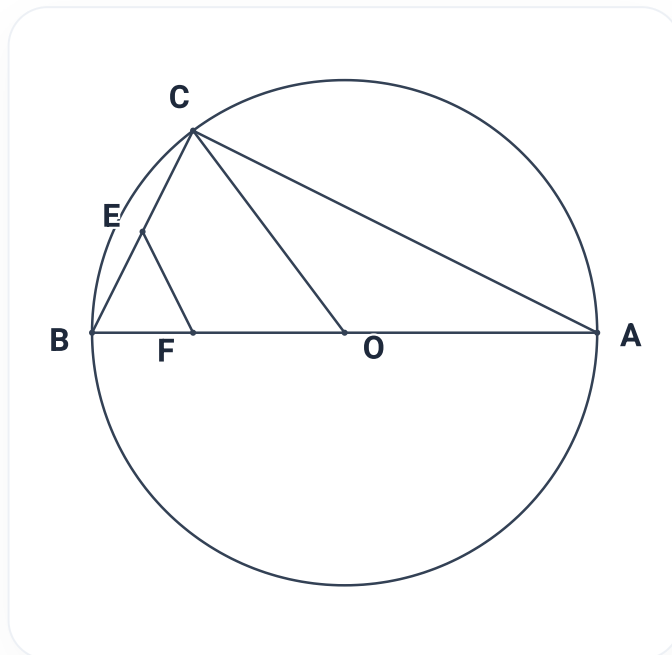
בוחרים באקראי 3 מן התלמידים שאינם מתנדבים (הוצאה ללא החזרה).

ד(1). מהי ההסתברות שהתלמיד הראשון שנבחר חבר בתנועת נוער ושני התלמידים שנבחרו אחריו אינם חברים בתנועת נוער?

ד(2). מהי ההסתברות שאחד מן התלמידים שנבחרו חבר בתנועת נוער והשניים האחרים אינם חברים בתנועת נוער אם ידוע שהתלמיד הראשון שנבחר אינו חבר בתנועת נוער?

שאלה 4 · מעגל עם קוטר ומרובע בר-חסימה CEFO: מקבילית, ניצבות ומעגלים משיקים

משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O כך ש-AB הוא קוטר במעגל. הנקודה E נמצאת על הצלע BC, והנקודה F נמצאת על הקטע BO, כמתואר בסרטוט. נתון כי המרובע CEFO הוא בר חסימה במעגל.



א. הוכיחו: $EF = EB$.

המעגל החוסם את המרובע CEFO חותך את הצלע AC בנקודה D כך ש-ED מקביל ל-AB.

ב(1). הוכיחו כי המרובע EDOB הוא מקבילית.

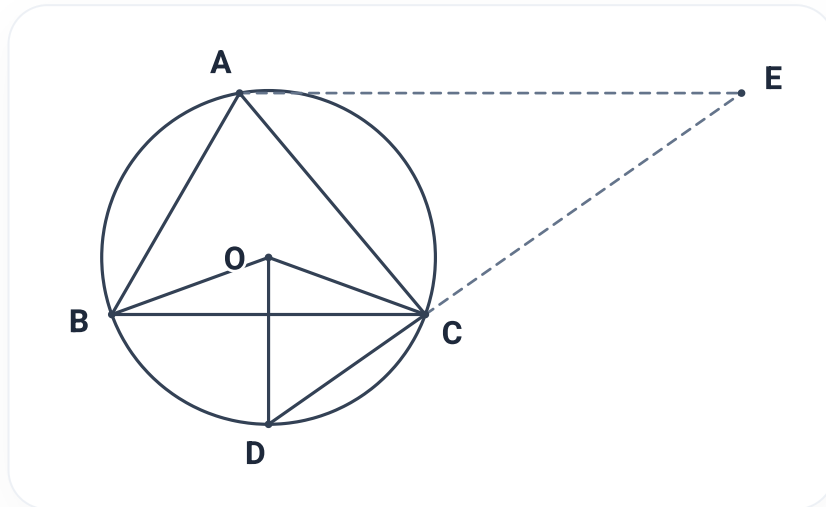
ב(2). הוכיחו: $OD \perp AC$.

הישר ℓ משיק בנקודה C למעגל החוסם את המשולש ABC.

ג. הוכיחו כי הישר ℓ משיק למעגל החוסם את המרובע CEFO.

שאלה 5 · משולש חסום במעגל ואמצע קשת: יחס שטחים, משוואה $\sin x = \sin \beta$ ורדיוס מעגל חסום

משולש ABC חד זוויות חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R. הנקודה D היא אמצע הקשת הקטנה BC, כמתואר בסרטוט. נתון: $\angle ABC = 60^\circ$. נסמן: $\angle BAC = \alpha$.



- א. הביעו באמצעות R ו- α את שטחי המשולשים ABC ו-ODC.
 - ב. מצאו את הערך של α .
 - ג. הביעו באמצעות R את רדיוס המעגל החסום במשולש ACE.
- נתון כי היחס בין שטח המשולש ABC ובין שטח המשולש ODC הוא: $2\sqrt{3} \sin(80^\circ)$.
- הנקודה E נמצאת על המשך המיתר DC כך ש- $\angle CAE = 50^\circ$, כמתואר בסרטוט.

שאלה 6 · פונקציה רציונלית עם פרמטר: מיקום הקיצון ביחס לאסימפטוטה, התאמת גרפים ושטח עם גבול

פרמטרי

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x-1}{(x-a)^3}$, המוגדרת בתחום: $x \neq a$, a הוא פרמטר שונה מ-0. ענו על התת-סעיפים (1)-(2). הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

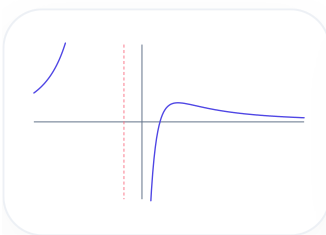
א(1). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y .

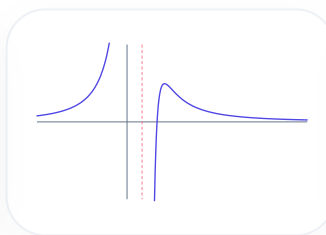
ב. מצאו עבור אילו ערכים של a יש לפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון שנמצאת משמאל לאסימפטוטה האנכית לציר ה- x , וקבעו את סוגה.

הגרפים 1-4 שלפניכם מתארים את הפונקציה $f(x)$ בעבור ערכים שונים של a .

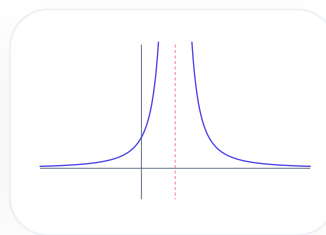
גרף 4



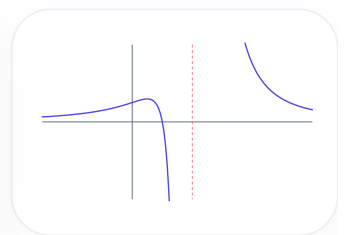
גרף 3



גרף 2



גרף 1



ג. התאימו לכל אחד מן הערכים I-IV של a את הגרף המתאים לו, ונמקו את תשובותיכם. I. $a = -1$. II. $a = 0.5$. III. $a = 1$. IV. $a = 2$.

נתונה הפונקציה $g(x)$, המקיימת: $g(x) = f(x) - b$ בעבור הערך של a המתאים לגרף 2. b הוא פרמטר חיובי. אחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x היא: $(t, 0)$, $1 < t < 5$. נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $g(x)$, על ידי הישר $x = t$ ועל ידי הישר $x = 5$ הוא 1.75.

ד. מצאו את הערך של b .

שאלה 7 · פונקציה טריגונומטרית עם פרמטר: אפסים, שיפוע מערך של $\cos x$, קיצון בתחום סגור, גרף

הנגזרת ואינטגרל $f^2 f'$

נתונה הפונקציה: $f(x) = (b + \cos x) \sin x$, המוגדרת בתחום: $-\pi \leq x \leq \pi$, b הוא פרמטר.

א. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית? נמקו את תשובתכם.

נתון כי לגרף הפונקציה $f(x)$ יש בדיוק שלוש נקודות חיתוך עם ציר ה- x .

ב. לפניכם שלוש אפשרויות I-III לערכים של b . קבעו איזו אפשרות יכולה להתאים לפונקציה $f(x)$, ונמקו את קביעתכם. I. $b = 0$. II. $0 < b < 1$. III. $1 \leq b$.

נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$, כאשר: $\cos x = \frac{1}{4}$, הוא: $-\frac{5}{8}$.

ג. מצאו את הערך של b .

הציבו $b = 1$ בפונקציה $f(x)$, וענו על הסעיפים ד-ו.

ד. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ה(1). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה(2). סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = (f(x))^2 \cdot f'(x)$. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת בתחום: $0 \leq x \leq \pi$.

ו. חשבו את השטח ברביע הראשון, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

שאלה 8 · חקירת $\frac{16}{x^2+3}$, מכפלת קטעים אנכיים שמקסימלית בנקודת הפיתול, והזזה ומתיחה של פונקציית

המטרה

נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x}$, המוגדרת בתחום: $x \geq 0$, ונתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{16}{x^2+3}$, המוגדרת לכל x .

א(1). מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

א(2). מצאו את שיעורי נקודות הפיתול של הפונקציה $g(x)$.

א(3). סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של כל אחת מן הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

בנקודה $C(t, 0)$, $t > 0$, מעבירים אנך לציר ה- x . האנך חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A ואת הגרף של הפונקציה $g(x)$ בנקודה B.

ב. הביעו באמצעות t את מכפלת אורכי הקטעים AC ו-BC.

ג. הוכיחו כי מכפלת אורכי הקטעים AC ו-BC מקסימלית כאשר הנקודה B היא נקודת פיתול של הפונקציה $g(x)$.

נתונה הפונקציה: $k(x) = \frac{8\sqrt{x-4}}{(x-4)^2+3}$, המוגדרת בתחום: $x \geq 4$.

ד. היעזרו בסעיפים הקודמים של השאלה. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $k(x)$, וקבעו את סוגה. נמקו את תשובתכם.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math