

שאלה 1 · שאלות קצרות: אינדוקציה, טרפז שווה שוקיים, גרפים של f , f' , f'' ופונקציה רציונלית

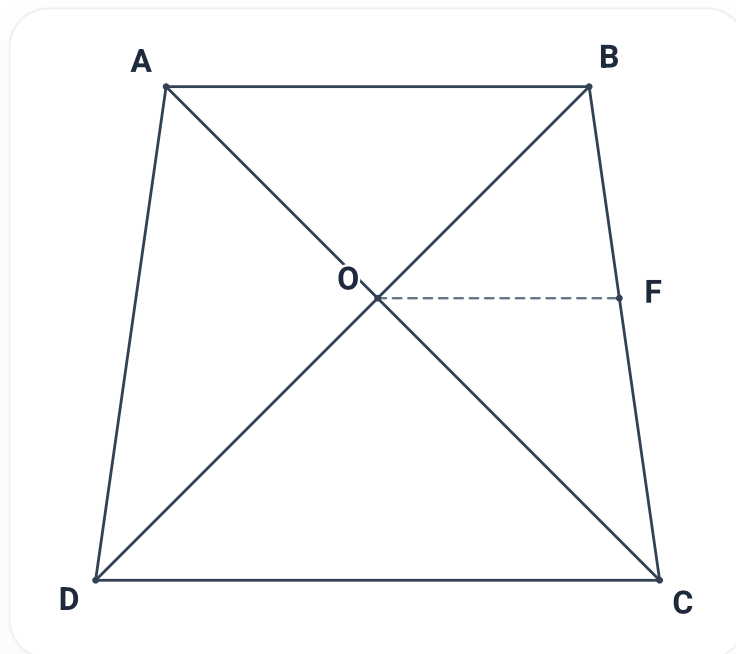
ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א(1). הוכיחו באינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(2n+1)(n+1)}{3}$$

א(2). חשבו את הערך של הסכום: $4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + 90^2$.

בסרטוט שלפניכם טרפז ABCD ($AB \parallel CD$). הנקודה O היא מפגש אלכסוני הטרפז.
 נתון: $\angle BAO = \angle CDO$.



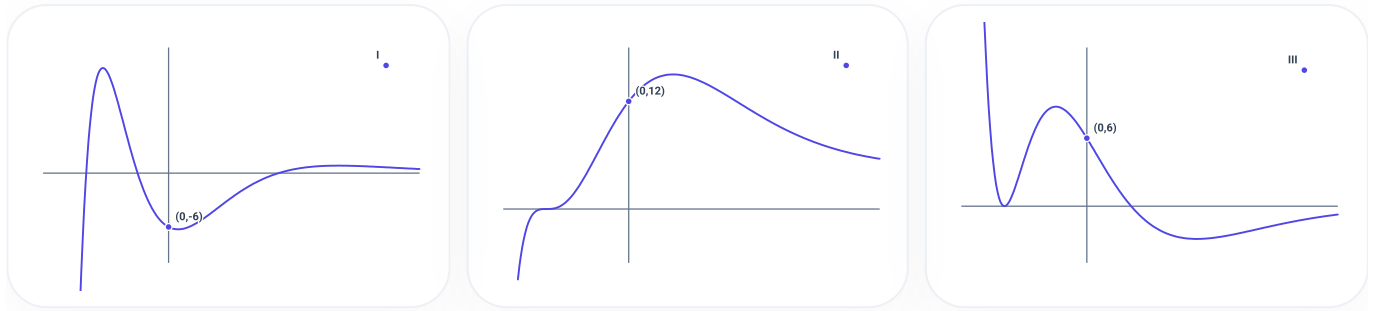
ב(1). הוכיחו כי הטרפז ABCD הוא שווה שוקיים.

הנקודה F נמצאת על הצלע BC כך שהקטע OF מקביל לבסיסי הטרפז.
 נתון כי אלכסוני הטרפז מאונכים זה לזה, $BO = 9$, $DO = 12$.

ב(2). מצאו את אורך הקטע OF.

הפונקציה $f(x)$, פונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ ופונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ מוגדרות לכל x .
 לפניכם שלושה גרפים I-III. אחד מן הגרפים מתאר את הפונקציה $f(x)$, אחד את פונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ ואחד את פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$.

בכל אחד מן הגרפים מופיעות כל נקודות הקיצון וכל נקודות החיתוך שלו עם ציר ה- x . על כל אחד מן הגרפים כתובים שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה- y .



ג(1). התאימו לכל אחת מן הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $f''(x)$ את הגרף המתאר אותה. נמקו את תשובתכם.

ג(2). כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$? נמקו את תשובתכם.

שיעורי נקודת המקסימום של הפונקציה $f(x)$ הם $(a, 15)$.

ג(3). מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f'(x)$, על ידי גרף הפונקציה $f''(x)$, על ידי הישר $x = a$ ועל ידי ציר ה- y .

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2}$, המוגדרת בתחום: $x \neq -2$, $x \neq 0$.

ד(1). מצאו את תחומי החיוביות של הפונקציה $f(x)$.



ד(2). קבעו איזה מבין הגרפים I-IV שלפניכם מתאר את הפונקציה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.

ד(3). חשבו את השטח הכלוא על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = 1$ ו- $x = 3$.

שאלה 2 · סדרה הנדסית: סדרות של הופכי מכפלות איברים, מונוטוניות וסכום אין-סופי עם פרמטר

נתונה סדרה הנדסית אין-סופית A שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \dots$.

$$\text{נתון: } a_4 = 4, 2a_2 + 8 = a_4.$$

א. מצאו את הערך של a_3 (מצאו את שתי האפשרויות).

נתון כי הסדרה A לא עולה ולא יורדת.

בונים מאיברי הסדרה A סדרה אין-סופית חדשה B . נתון כי איברי הסדרה B מקיימים $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$ לכל n טבעי.

ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, ומצאו את המנה שלה.

בונים מאיברי הסדרה A סדרה הנדסית אין-סופית נוספת C . איברי הסדרה C הם: $\frac{k}{a_1 \cdot a_2}, \frac{k}{a_3 \cdot a_4}, \frac{k}{a_5 \cdot a_6}, \dots$. $k \neq 0$. הוא פרמטר.

ג(1). מצאו את מנת הסדרה C .

ג(2). מצאו בעבור אילו ערכים של k הסדרה C עולה. נמקו את תשובתכם.

נסמן ב- S_B את סכום הסדרה B , וב- S_C את סכום הסדרה C .

$$\text{נתון } S_C = 12 \cdot S_B.$$

ד. מצאו את הערך של k .

שאלה 3 · הסתברות: ברנולי עם p לא ידוע, הסתברות מותנית ותנאי עצירה

במדינה גדולה התקיימו בחירות. המצביעים בבחירות אלה יכולים להצביע למפלגה א' או למפלגה ב' בלבד.

נסמן ב- p את ההסתברות שמצביע שנבחר באקראי הצביע למפלגה א' ($0 < p < 1$).

בוחרים באקראי 3 מצביעים.

נתון כי ההסתברות שבדיוק אחד מהם הצביע למפלגה א' גדולה פי 2 מן ההסתברות ששלושתם הצביעו למפלגה ב'.

א. מצאו את הערך של p .

בוחרים באקראי 4 מצביעים.

ב. ידוע כי ארבעתם הצביעו לאותה המפלגה. מהי ההסתברות שהם הצביעו למפלגה א'?

חלק מן המצביעים הם מבוגרים והשאר צעירים.

נתון כי 49% מן המצביעים המבוגרים הצביעו למפלגה ב' ו-18% מן המצביעים הצעירים הצביעו למפלגה א'.

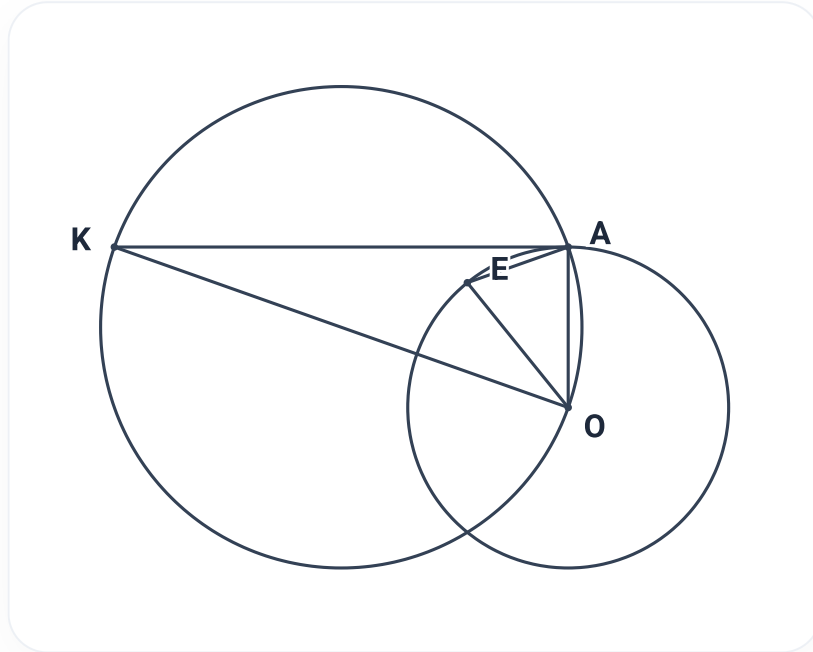
ג. מהי ההסתברות לבחור באקראי מצביע צעיר אחד מבין כל המצביעים?

לאחר הבחירות נערך סקר טלפוני בקרב המצביעים. דני, אחד הסוקרים, התקשר באקראי למצביעים צעירים בלבד. הוא התקשר אליהם בזה אחר זה והפסיק מייד לאחר שראיין צעיר אחד שהצביע למפלגה אחת וצעיר נוסף שהצביע למפלגה האחרת.

ד. מהי ההסתברות שדני התקשר ל-5 צעירים בדיוק?

שאלה 4 · שני מעגלים נחתכים: משיק, זווית היקפית על קוטר, דמיון שווי שוקיים וחס שטחים

בסרטוט שלפניכם מעגל גדול שרדיוסו R ומעגל קטן שמרכזו בנקודה O ורדיוסו r . הנקודה O נמצאת על המעגל הגדול.
 הנקודה A היא אחת מנקודות החיתוך של שני המעגלים, כמתואר בסרטוט.
 דרך הנקודה A העבירו משיק למעגל הקטן. המשיק חותך את המעגל הגדול בנקודה K .
 הנקודה E נמצאת על המעגל הקטן בתוך המשולש KAO .



א. הוכיחו כי $\angle AOE = 2\angle KAE$.

המשך קטע AE חותך את הקטע OK בנקודה M . נתון כי הנקודה M היא אמצע הקטע OK .

ב. הוכיחו כי הנקודה M היא מרכז המעגל הגדול.

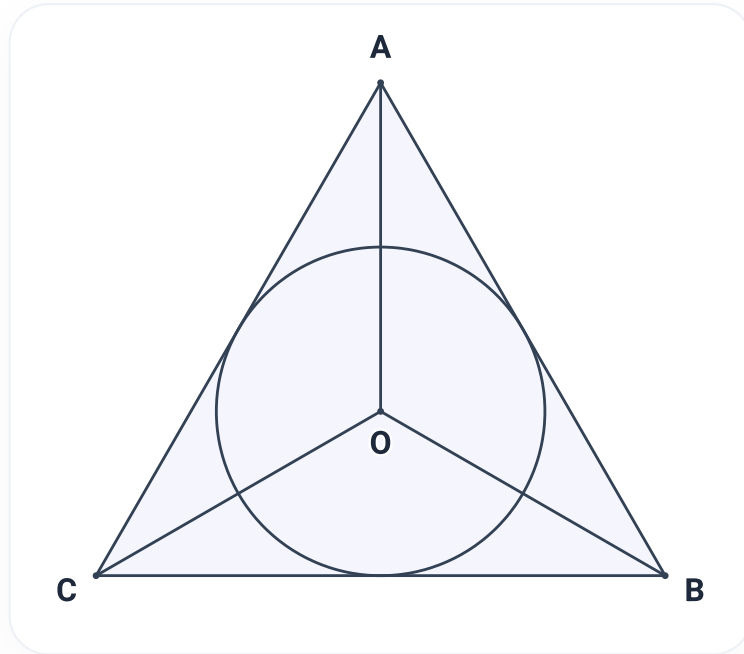
ג. הוכיחו כי $\triangle MOA \sim \triangle OEA$.

נתון: $R = 1.5r$. נסמן ב- S את שטח המשולש MEO .

ד. הביעו באמצעות S את שטח המשולש OKA .

שאלה 5 · משולש שווה שוקיים ומעגל חסום: הבעה בעזרת זווית, משוואה עם זווית כפולה ומשפט הקוסינוסים

במשולש שווה שוקיים ABC ($AC = AB$) חסום מעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו r (ראו סרטוט). נסמן:
 $\angle ACB = 2\alpha$.



א(1). הביעו באמצעות r ו- α את אורך הקטע CO .

א(2). הביעו באמצעות r ו- α את אורך הצלע AC .

נתון כי אורך הצלע AC גדול פי $\sqrt{3}$ מאורך הקטע CO .

ב. מצאו את הערך של α .

הציבו $\alpha = 30^\circ$ וענו על הסעיפים ג-ד. המעגל חותך את הקטע BO בנקודה K . נתון כי אורך הקטע CK הוא $\sqrt{63}$.

ג. מצאו את הערך של r .

הנקודה E נמצאת על הצלע CB . נתון כי שטח המשולש CKE הוא 6.

ד. חשבו את אורך הקטע BE .

שאלה 6 · פונקציית שורש עם פרמטר: אסימפטוטות שונות ב- $\pm\infty$, אי-זוגיות, הגרף של $\frac{1}{f^2}$ ושטח

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, a הוא פרמטר חיובי. ענו על הסעיפים א-ו. הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

ב. הוכיחו כי הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

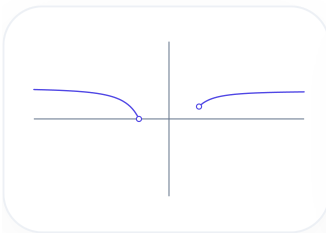
ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

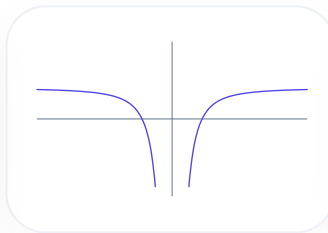
נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{(f(x))^2}$. תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ה(1). מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

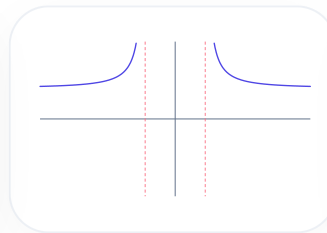
גרף IV



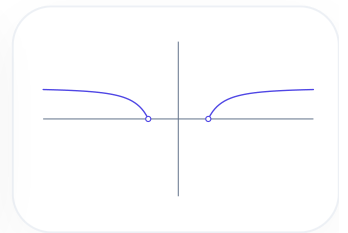
גרף III



גרף II



גרף I



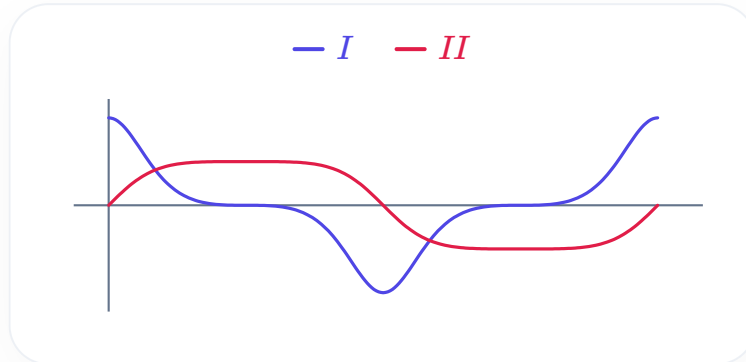
ה(2). קבעו איזה מן הגרפים I-IV שלפניכם מתאר את הפונקציה $g(x)$. נמקו את קביעתכם.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x , ועל ידי הישרים $x = 2a$ ו- $x = 3a$, הוא 2.5.

ו. מצאו את הערך של a .

שאלה 7 · פונקציה טריגונומטרית רציונלית: גרף הנגזרת, קיצון בתחום סגור והפונקציה $|f(x) - 0.4|$

בסרטוט שלפניכם נתונים שני גרפים I-II, בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$. אחד מן הגרפים מתאר את הפונקציה $f(x)$, ואחד מהם מתאר את פונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$. הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ מוגדרות לכל x בתחום הנתון.



א. קבעו איזה מן הגרפים I-II מתאר את הפונקציה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.

נתון כי $f(x) = \frac{\sin x}{1 + (\sin x)^2}$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

ב(1). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

ב(2). מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

נתונה הפונקציה $g(x) = |f(x) - 0.4|$ המוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

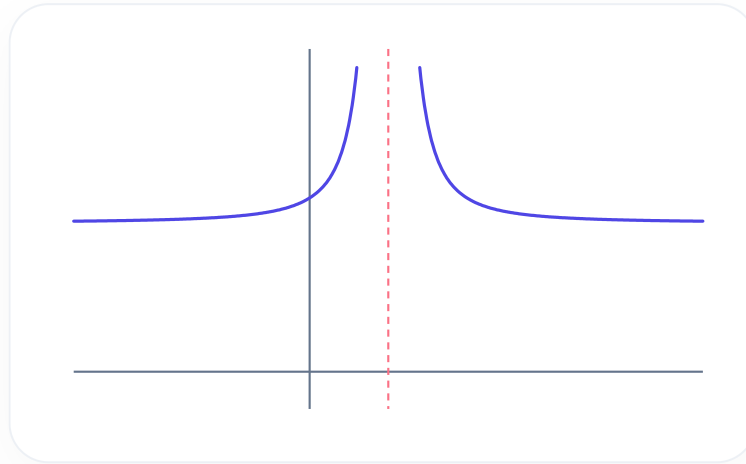
ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x .

ד(1). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ד(2). מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של גרף הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

שאלה 8 · פונקציה רציונלית עם פרמטר: משיק ושטח מינימלי של משולש

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + 6$. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $x \neq 1$. a הוא פרמטר חיובי.



- א. מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.
- הנקודה C נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$, ושיעור ה- x שלה הוא 2. דרך הנקודה C העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$.
- ב. הביעו באמצעות a את משוואת המשיק.
- המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה A ואת הישר $x = 1$ בנקודה B . D היא נקודה ששיעוריה הם $(1, 0)$.
- ג. הביעו באמצעות a את שטח המשולש ADB .
- ד. מצאו את הערך של a שבעבורו שטח המשולש ADB הוא מינימלי.

כל הבגריות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math