

בגרות במתמטיקה - שאלון 571

קיץ 2025 מועד ב' (תשפ"ה)

5 יח"ל · שאלון 035571 · 8 שאלות

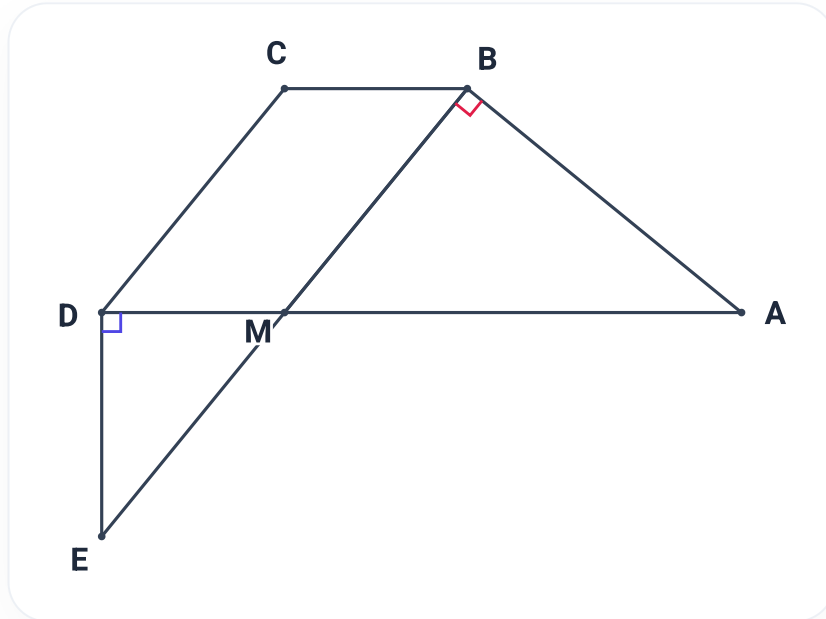
שאלה 1 · שאלות קצרות: אינדוקציה, טרפזים וטריגונומטריה, גרפים של $x^n(x \pm 1)$ ופונקציית הצטברות

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{10}{27} + \dots + \frac{4n-2}{3^n} = 2 - \frac{2n+2}{3^n}$$

בסרטוט שלפניכם טרפז ABCD ($BC \parallel AD$) וטרפז BCDE ($CD \parallel BE$). הנקודה M היא נקודת החיתוך של הצלעות AD ו-BE. נתון: $AB \perp BM$, $ED \perp AD$, $EM = BM$. אורך הקטע AM גדול פי 2.5 מאורך הקטע DM. נסמן: $\angle EMD = \alpha$.



ב(1). מצאו את הערך של α .

נתון: $DM = 6$.

ב(2). חשבו את שטח הטרפז ABCD.

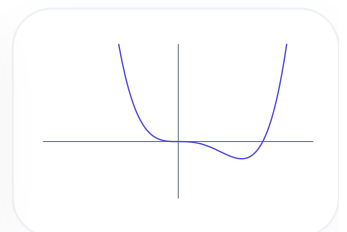
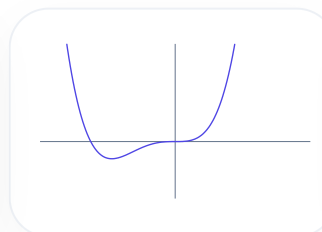
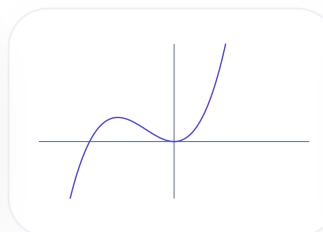
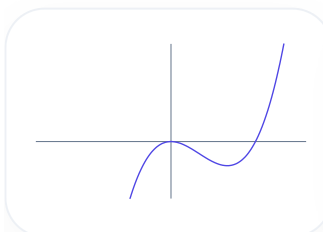
נתונות הפונקציות $f(x) = x^n(x-1)$ ו- $g(x) = x^n(x+1)$, המוגדרות לכל x . n הוא פרמטר טבעי גדול מ-1. כל אחד מן הגרפים I-IV לפניכם מייצג אחת מן הפונקציות בעבור n זוגי או n אי-זוגי.

גרף IV

גרף III

גרף II

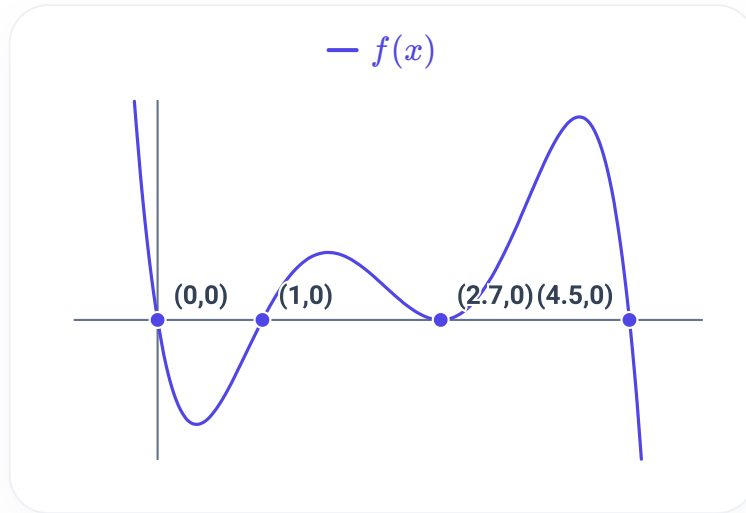
גרף I



ג(1). התאימו לכל אחד מן הגרפים I-IV את הפונקציה, $f(x)$ או $g(x)$, המתאימה לו בעבור n זוגי או n אי-זוגי.

ג(2). הציבו $n = 2$ וחשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

בסרטוט שלפניכם מתוארת הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x . בסרטוט מצוינים כל שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x . פונקציה $g(x)$ מוגדרת בתחום $x \geq 0$, ומקיימת $g(x) = \int_0^x f(t) dt$.



- ד(1). מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגן.
- נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x בתחום $1 \leq x \leq 2.7$. נתון: $g(4.5) = 3 \cdot S$, $g(2.7) = 0$.
- ד(2). הביעו באמצעות S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x בתחום $0 \leq x \leq 4.5$.

שאלה 2 · סדרות הנדסיות אין-סופיות: סימן האיברים, צירוף של סדרות עם אותה מנה, סכומים במקומות

זוגיים ואי-זוגיים

- a_n היא סדרה הנדסית אין-סופית עולה שמנתה היא q , $0 < q < 1$.
- א. קבעו אם כל איברי הסדרה a_n הם חיוביים או שליליים. נמקו את קביעתכם.
- b_n היא סדרה הנדסית אין-סופית וגם מנתה היא q . c_n היא סדרה אין-סופית המקיימת לכל n טבעי $c_n = 2b_n - a_n$, $(c_n \neq 0)$.
- ב. הוכיחו כי הסדרה c_n היא הנדסית, והביעו את מנתה באמצעות q .
- נתון כי $c_1 = 6\frac{2}{3}$, וכי סכום איברי הסדרה c_n גדול פי 8 מסכום איברי הסדרה b_n .
- ג. מצאו את הערך של a_1 .
- נתון כי סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה a_n גדול ב-4 מסכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים בסדרה a_n .
- ד. מצאו את הערך של q .

שאלה 3 · הסתברות: בית אריזה - הסתברות מתוך שתי בחירות, הסתברות שלמה, הסתברות מותנית הפוכה

וברנולי מותנה

בבית אריזה גדול אורזים שני סוגי פירות בלבד: לימונים ותפוזים. חלק מן הפירות מיועדים לייצוא והשאר אינם מיועדים לייצוא. ההסתברות לבחור באקראי שני תפוזים מבין כל הפירות בבית האריזה היא 0.4096. בוחרים באקראי פרי אחד מבין כל הפירות בבית האריזה.

א. מהי ההסתברות שנבחר לימון?

ההסתברות לבחור באקראי תפוז מבין הפירות שמיועדים לייצוא היא $\frac{3}{5}$. ההסתברות לבחור באקראי לימון מבין הפירות שאינם מיועדים לייצוא היא $\frac{1}{5}$. בוחרים באקראי פרי אחד מבין כל הפירות בבית האריזה.

ב. מהי ההסתברות שנבחר פרי המיועד לייצוא?

בוחרים באקראי שני פירות מבין כל הפירות בבית האריזה.

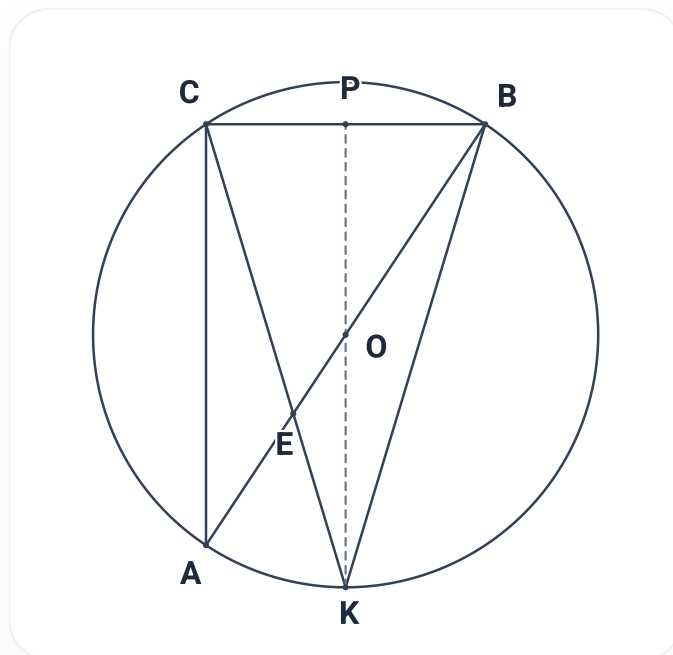
ג. ידוע שנבחרו שני לימונים. מהי ההסתברות שאחד מהם מיועד לייצוא והאחר אינו מיועד לייצוא?

בוחרים באקראי 4 פירות מבין כל הפירות בבית האריזה. ידוע שלפחות אחד מהם מיועד לייצוא.

ד. מהי ההסתברות שלכל היותר 3 מבין הפירות שנבחרו מיועדים לייצוא?

שאלה 4 · מעגל: זוויות היקפיות ודמיון, קטע אמצעים, חלוקת רדיוס ויחס שטחים

AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O. המיתר CK חותך את הרדיוס AO בנקודה E (ראו סרטוט). נתון: $\angle EKO = \angle ABK$.



א. הוכיחו כי $\triangle ACE \sim \triangle OKE$.

המשך הקטע KO חותך את המיתר CB בנקודה P. נתון כי $PO = 7$, וכי רדיוס המעגל הוא 8.4.

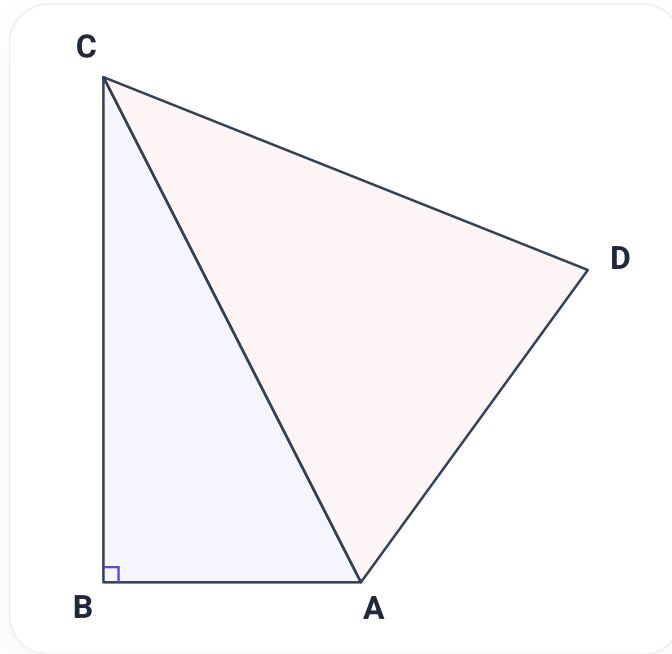
ב(1). הוכיחו כי PO הוא קטע אמצעים במשולש ABC.

ב(2). מצאו את אורך הקטע EO.

ג. מצאו את היחס בין שטח המשולש ACE ובין שטח המשולש AOK.

שאלה 5 · משולש ישר זווית ומשולש צמוד: משפט הקוסינוסים, מעגל חסום ומרחק בין מרכזי המעגלים

בסרטוט שלפניכם משולש ישר זווית ABC ($\angle ABC = 90^\circ$). על הצלע AC בנו משולש נוסף ACD כך ש- AC הוא חוצה זווית BAD . נסמן: $\angle CAB = \alpha$, $AB = k$.



א. הביעו באמצעות k ו- α את האורך של AC .

נתון: $AD = 1.5 \cdot k$, $CD = \sqrt{3.25} \cdot k$.

ב. חשבו את הערך של α .

הציבו $\alpha = 60^\circ$ וענו על סעיפים ג-ד. הנקודה M היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC .

ג. הביעו באמצעות k את רדיוס המעגל החסום במשולש ABC .

הנקודה E היא מרכז המעגל החסום את המשולש ABC . נתון: $ME = 4$.

ד. חשבו את הערך של k .

שאלה 6 · פונקציה רציונלית עם פרמטר: חקירה, פונקציה שנגזרתה $f(x) + 1$ וזיהוי גרף

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2ax}{(x^2-16)^2}$, a הוא פרמטר חיובי.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

א(3). מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

א(4). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

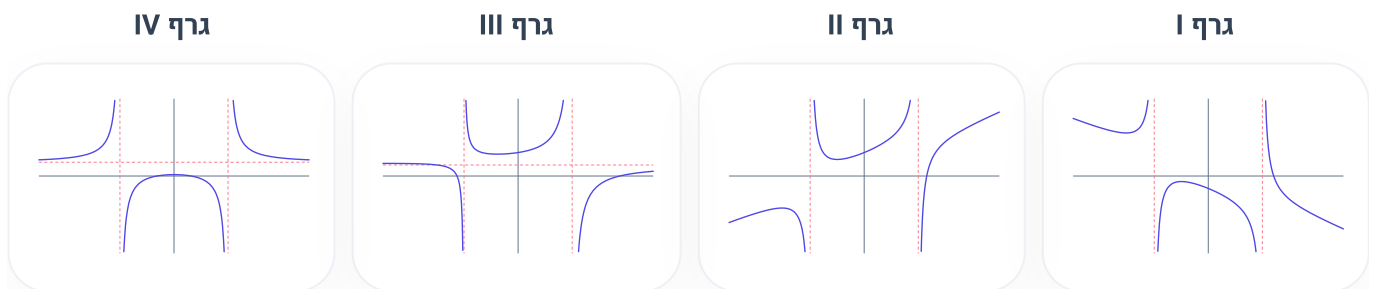
נתונה הפונקציה $g(x)$ שפונקציית הנגזרת שלה היא $g'(x) = f(x) + 1$. תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ ושל פונקציית הנגזרת $g'(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$. נתון כי לפונקציה $g(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = -2$.

ב. מצאו את הערך של a .

הציבו את הערך של a שמצאתם בפונקציה $f(x)$ וענו על הסעיפים ג-ד. נתון כי הפונקציה $g(x)$ עוברת בנקודה $(2, 7)$.

ג. כתבו ביטוי אלגברי אפשרי לפונקציה $g(x)$.

שלפניכם ארבעה גרפים, I-IV:



ד. קבעו איזה מן הגרפים I-IV שלפניכם הוא גרף אפשרי של הפונקציה $g(x)$. נמקו את קביעתכם.

שאלה 7 · פונקציה טריגונומטרית עם $\frac{1}{\cos x}$: חקירה בתחום, זהות הזווית הכפולה ונקודה חסרה

נתונה הפונקציה $f(x) = 2 \cos x + \frac{1}{\cos x}$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לציר ה- x של הפונקציה $f(x)$.

ב. קבעו אם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית. נמקו את קביעתכם.

ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = 2 \cos x + \frac{2 \sin x}{\sin(2x)}$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

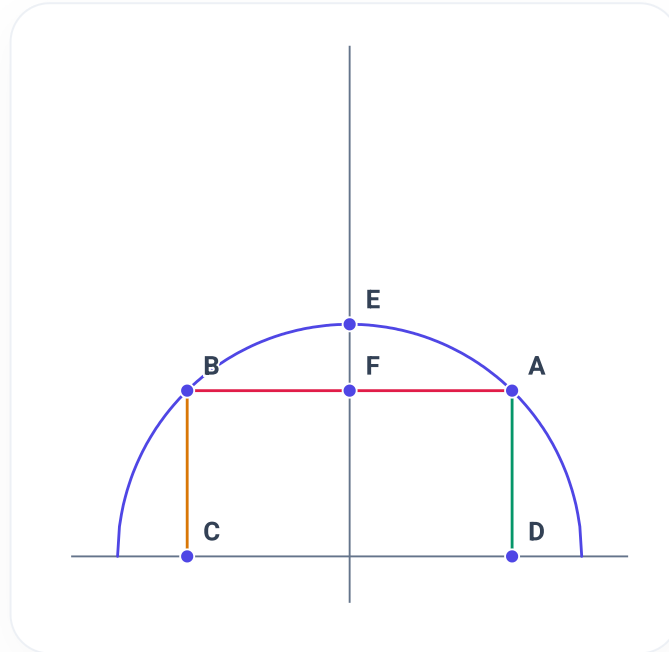
ה(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ה(2). הראו כי $g(x) = 2 \cos x + \frac{1}{\cos x}$ בעבור כל x בתחום הגדרתה.

1. האם קיים ערך של k שבעבורו הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה $g(x)$ ב-3 נקודות בדיוק? אם כן, מצאו אותו. אם לא, נמקו את תשובתכם.

שאלה 8 · מלבן חסום מתחת לחצי מעגל וריבוע על הקטע EF: מקסימום של הפרש היקפים עם פרמטר

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, R הוא פרמטר חיובי. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $-R \leq x \leq R$. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון. דרך הנקודה A העבירו ישר המקביל לציר ה- x וחיתוך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה נוספת B. הנקודות C ו-D נמצאות על ציר ה- x כך שנוצר מלבן ABCD. הנקודה F היא נקודת החיתוך של הצלע AB עם ציר ה- y . הנקודה E היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y . נתון ריבוע שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע EF. נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה A.



א(1). הביעו באמצעות R ו- t את אורך הקטע EF.

א(2). הביעו באמצעות R ו- t את היקף המלבן ABCD.

ב. הביעו באמצעות R את הערך של t שבעבורו ההפרש בין היקף המלבן ABCD לבין היקף הריבוע הוא מקסימלי.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math