

שאלה 1 · שאלות קצרות: אינדוקציה, חסם לחיתוך והסתברות מותנית, גרף של $\frac{1}{f^2}$, פונקציה קדומה וזיהוי גרף

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א–ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

ב. ליונתן יש בספרייה שבחדרו ספרים משני סוגים: ספרי קומיקס וספרי עיון. 60% מן הספרים הם ספרי קומיקס והשאר ספרי עיון. 70% מן הספרים הם בעברית והשאר באנגלית.

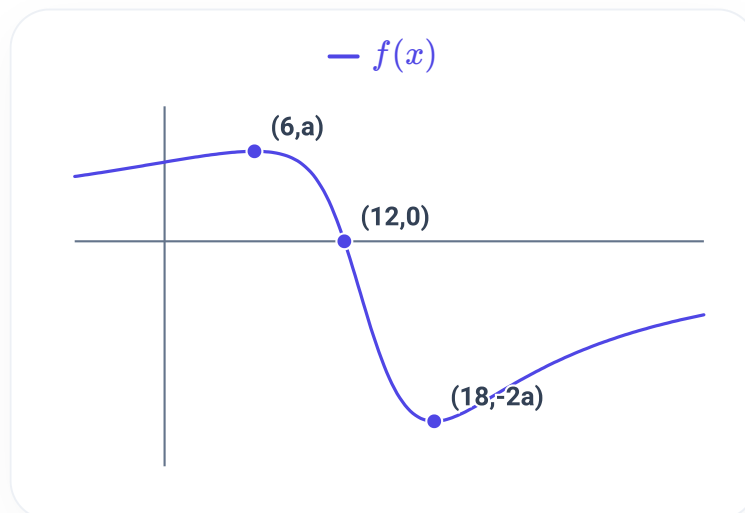
לפניכם שתי טענות I-II. קבעו בעבור כל אחת מהן אם היא נכונה או לא נכונה, ונמקו את קביעותיכם.

I. ליונתן אין ספרי קומיקס בעברית.

II. ההסתברות לבחור באקראי ספר בעברית מבין ספרי הקומיקס גדולה מן ההסתברות לבחור באקראי ספר קומיקס מבין הספרים שבעברית.

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל x . לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אחת בלבד, שמשוואתה $y = 0$, ונקודת חיתוך אחת בלבד עם ציר ה- x , ששיעוריה הם $(12, 0)$. שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ מוצגים בסרטוט. a הוא פרמטר גדול מ-1.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{(f(x))^2}$.



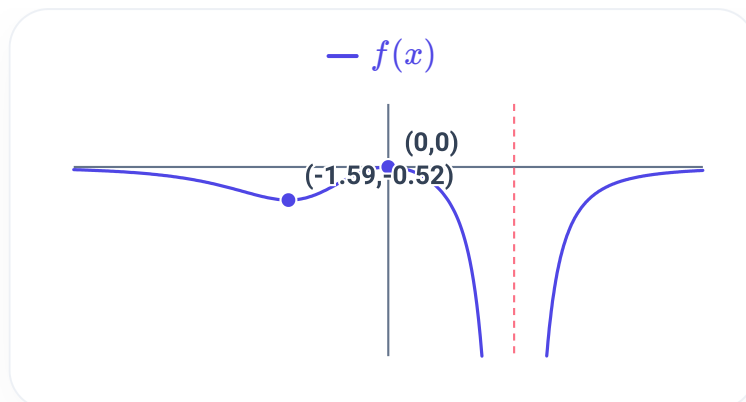
ג(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ג(2). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתון כי לישיר $y = \frac{a}{27}$ ולגרף הפונקציה $g(x)$ יש בדיוק 3 נקודות משותפות.

ג(3). מצאו את הערך של a .

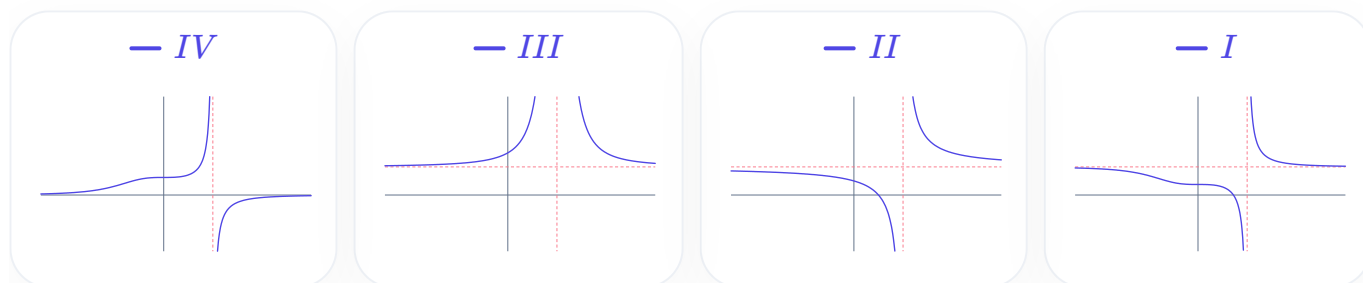
בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{-30x^2}{(x^3-8)^2}$, המוגדרת בתחום $x \neq 2$. בסרטוט מוצגות כל נקודות הקיצון וכל נקודות החיתוך עם ציר ה- x של גרף הפונקציה $f(x)$.



היא פונקציה שהנגזרת שלה מקיימת $g'(x) = f(x)$. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת בתחום $x \neq 2$. נתון כי גרף הפונקציה $g(x)$ עובר דרך הנקודה $(0, 0.75)$.

ד(1). מצאו פונקציה $g(x)$ המקיימת תנאים אלה.

לפניכם הגרפים I-IV.



ד(2). אחד מן הגרפים I-IV שלפניכם מתאר פונקציה $g(x)$ המקיימת תנאים אלה. קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.

שאלה 2 · סדרות הנדסיות: סדרת המכפלות, מונוטוניות וסכומים אין-סופיים

a_n היא סדרה הנדסית אין-סופית עולה שמנתה היא q . b_n היא סדרה הנדסית אין-סופית עולה שמנתה היא $2q$. c_n היא סדרה אין-סופית שאיבריה מקיימים $c_n = a_n \cdot b_n$ לכל n טבעי.

א. הוכיחו כי הסדרה c_n היא הנדסית, והביעו באמצעות q את מנתה.

נתון: $a_1 = b_1$, $c_2 = \frac{1}{8} \cdot (a_1)^2$.

ב. מצאו את הערך של q .

ג(1). האם הערך של a_1 הוא חיובי או שלילי? נמקו את תשובתכם.

ג(2). האם הסדרה c_n עולה או יורדת? נמקו את תשובתכם.

נסמן ב- S_1 את סכום הסדרה a_n , ב- S_2 את סכום הסדרה b_n וב- S_3 את סכום הסדרה c_n . נתון: $S_1 + S_2 + S_3 = 434$.

ד. מצאו את הערך של a_1 .

שאלה 3 · הסתברות: בחירת שק ושתי הוצאות עם החזרה, בייס, ברנולי ושלוש תוצאות

בשק א' ובשק ב' יש כדורים משני סוגים: כדורים רכים וכדורים קשים.

בשק א' יש 10 כדורים, מתוכם 4 כדורים רכים והשאר קשים.

בשק ב' יש 12 כדורים, מתוכם x כדורים רכים והשאר קשים.

גלית בוחרת באקראי שק ומוציאה ממנו באקראי כדור אחד. לאחר מכן היא מחזירה את הכדור לשק ומוציאה באקראי כדור שני מאותו השק (הוצאה עם החזרה). נתון כי ההסתברות שגלית הוציאה שני כדורים רכים היא $\frac{41}{200}$.

א. מצאו את הערך של x .

ב. ידוע שגלית הוציאה שני כדורים מאותו הסוג. מהי ההסתברות שהיא הוציאה שני כדורים קשים?

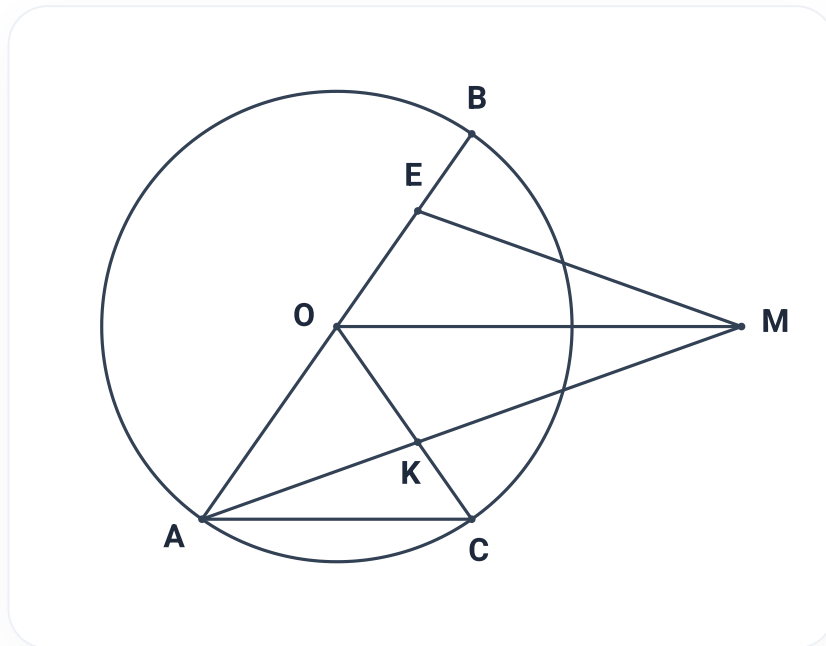
גלית מבצעת את התהליך המתואר לפניכם 4 פעמים: היא בוחרת באקראי שק ומוציאה ממנו באקראי כדור אחד. לאחר מכן היא מחזירה את הכדור לשק ומוציאה באקראי כדור שני מאותו השק (הוצאה עם החזרה).

ג. מהי ההסתברות שגלית הוציאה בדיוק בשתיים מן הפעמים רק כדורים קשים?

ד. מהי ההסתברות שגלית הוציאה בשתיים מן הפעמים רק כדורים קשים ובשתיים מן הפעמים רק כדורים רכים?

שאלה 4 · מעגל, דלתון ומקבילים: תאלס הפוך, זווית מרכזית והיקפית, דמיון ויחסי שטחים

בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O . AB הוא קוטר במעגל. הנקודה C נמצאת על המעגל. הנקודה M נמצאת מחוץ למעגל כך שהקטע AM חותך את הקטע CO בנקודה K . הנקודה E נמצאת על הקטע BO כך שהמרובע $EMKO$ הוא דלתון ($OK = OE$, $MK = ME$).



א. הוכיחו כי $EK \parallel BC$.

ב. הוכיחו כי $OM \parallel AC$.

נתון: $\frac{BC}{EK} = \frac{5}{3}$.

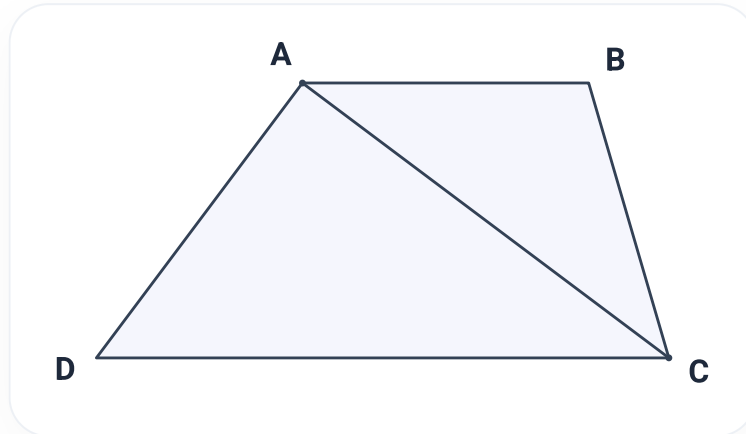
ג. מצאו את הערך של $\frac{OM}{AC}$.

נסמן ב- S את שטח הדלתון $EMKO$.

ד. הביעו באמצעות S את שטח המשולש AOC .

שאלה 5 · טרפז שבו הבסיס שווה לשוק: אלכסון, משפט הקוסינוסים ורדיוס מעגל חסום

בסרטוט שלפניכם טרפז $ABCD$ ($AB \parallel DC$). נתון כי אורך הבסיס AB שווה לאורך הצלע BC . נסמן:
 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $AB = BC = k$, $\angle ACB = \alpha$.



א. הראו כי $AC = 2k \cdot \cos \alpha$.

נתון: $AD = 1.2k$, $DC = 2k$.

ב. מצאו את הערך של α .

ג. מצאו את גודל הזווית ADC .

המשכי הצלעות DA ו- CB נחתכים בנקודה E . נתון כי האורך של רדיוס המעגל החסום במשולש EDC הוא 1.4.

ד. מצאו את הערך של k .

שאלה 6 · פונקציה רציונלית עם פרמטר: קיצון, נקודה משותפת אחת עם ציר ה- x ושטח של $g \cdot g'$

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax}{(x-3)^2}$, המוגדרת בתחום $x \neq 3$. a הוא פרמטר חיובי.

ענו על תתי-הסעיפים (1)-(2). הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

א(1). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) + 0.5$, המוגדרת בתחום $x \neq 3$. נתון כי לגרף הפונקציה $g(x)$ יש בדיוק נקודה אחת משותפת עם ציר ה- x .

ג. מצאו את הערך של a .

הציבו בפונקציה $g(x)$ את הערך של a שמצאתם, וענו על סעיף ד. נתונה הפונקציה $h(x) = g(x) \cdot g'(x)$, המוגדרת בתחום $x \neq 3$.

ד(1). רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $h(x)$.

ד(2). חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $h(x)$ ועל ידי ציר ה- x בתחום $-9 \leq x \leq 0$.

שאלה 7 · מכפלה של ביטויים ב- $\cos x$ עם פרמטר: זוגיות, קיצון בנקודה נתונה ו- $f + |f|$

נתונה הפונקציה $f(x) = (1 + \cos x) \cdot (-1 + b \cos x)$, המוגדרת בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$. b הוא פרמטר. נתון: $0 < b < 1$.

א. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית? נמקו את תשובתכם.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{3}$.

ג. מצאו את הערך של b .

הציבו $b = \frac{1}{2}$ בפונקציה $f(x)$, וענו על הסעיפים ד-ה.

ד(1). מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

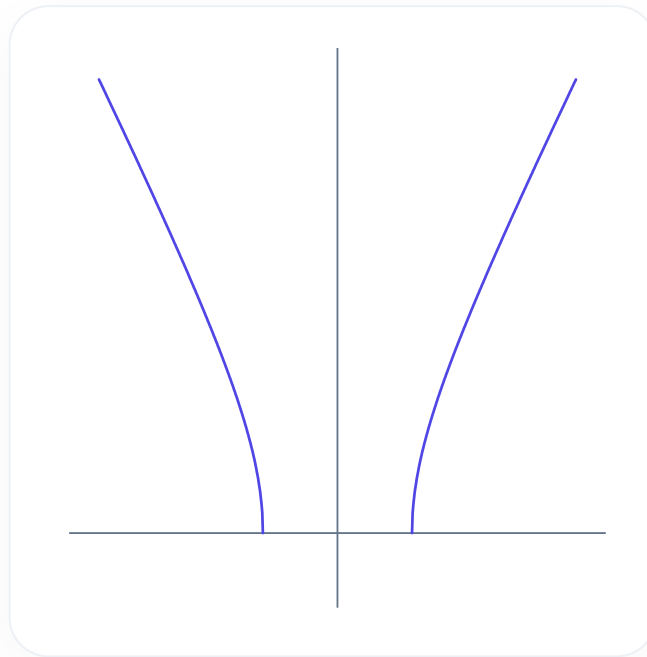
ד(2). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $h(x) = f(x) + |f(x)|$, המוגדרת בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$. נקודה A היא נקודה כלשהי הנמצאת על גרף הפונקציה $h(x)$.

ה. האם שיעור ה- y של נקודה A הוא חיובי, שלילי, שווה אפס או שאי אפשר לקבוע? נמקו את תשובתכם.

שאלה 8 · פונקציית שורש וישר: נקודות חיתוך, קטעים אנכי ואופקי וסכום מקסימלי

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1}$. נתון הישר $y = 3x - 3$.



א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי שתי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הישר הנתון.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום שבין שתי הנקודות שמצאתם בסעיף ב. דרך הנקודה A העבירו שני ישרים: ישר המקביל לציר ה- y וחותר את הישר הנתון בנקודה B, וישר המקביל לציר ה- x וחותר את הישר הנתון בנקודה C. נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה A.

ג(1). הביעו באמצעות t את אורך הקטע AB.

ג(2). הביעו באמצעות t את אורך הקטע AC.

ד. מצאו את הערך של t שבעבורו סכום אורכי הקטעים AB ו-AC הוא מקסימלי.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math