

שאלה 1 · שאלות קצרות: נוסחת סכום באינדוקציה, התאמת פונקציית שורש לגרף ושטח של f^2 , גרף של

$\frac{1}{f-2}$, משולש ישר זווית שצלעותיו בסדרה הנדסית

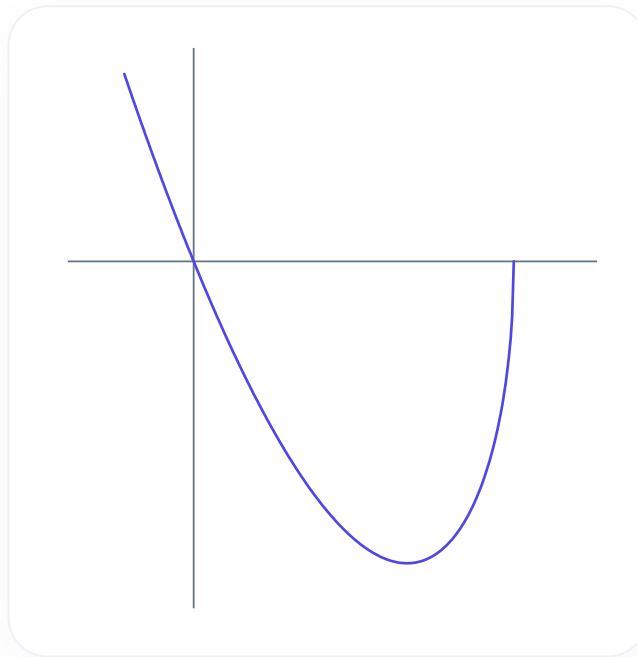
ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

נתון כי השוויון $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{b}$ מתקיים בעבור $n = 2$. b הוא פרמטר שונה מ-0.

א(1). מצאו את הערך של b .

א(2). הציבו $b = 4$ והוכיחו באינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי השוויון הנתון מתקיים לכל n טבעי.

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $x \leq 6$.



אחד מן הביטויים I-IV שלפניכם מייצג את הפונקציה $f(x)$.

I. $f(x) = x\sqrt{6-x}$

II. $f(x) = -x\sqrt{6-x}$

III. $f(x) = x\sqrt{x-6}$

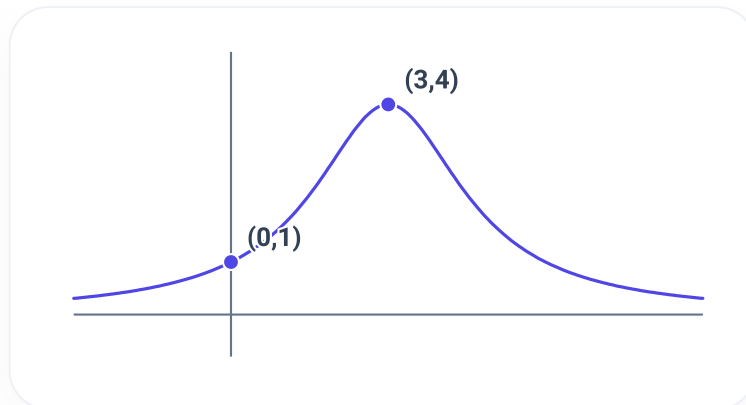
IV. $f(x) = -x\sqrt{x-6}$

ב(1). קבעו איזה מן הביטויים מייצג את הפונקציה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.

נתונה הפונקציה $g(x) = (f(x))^2$ המוגדרת בתחום $x \leq 6$.

ב(2). חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x . לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד ואסימפטוטה אופקית אחת בלבד שמשוואתה היא $y = 0$. שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ ושיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y מוצגים בסרטוט.



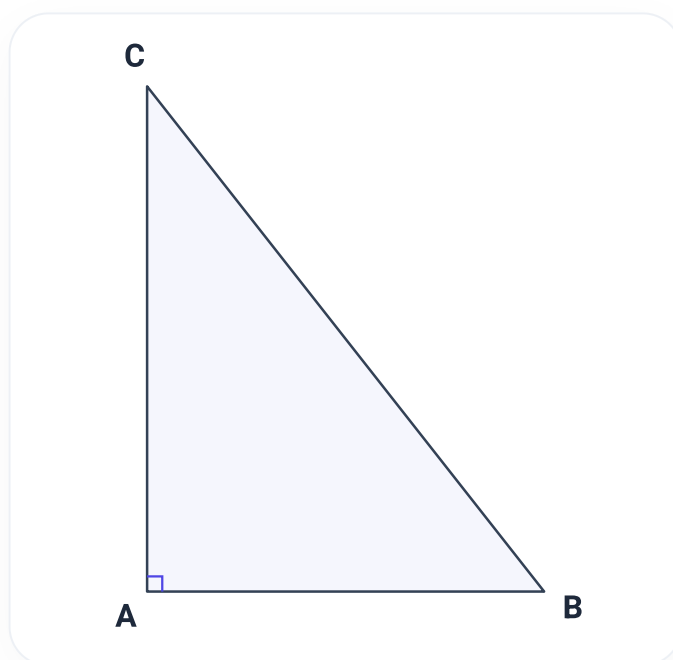
נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)-2}$.

ג(1). כמה אסימפטוטות המאונכות לציר ה- x יש לפונקציה $g(x)$? נמקו את תשובתכם.

ג(2). מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה- y של הפונקציה $g(x)$.

ג(3). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

בסרטוט שלפניכם משולש ישר זווית ABC ($\angle CAB = 90^\circ$).



נתון כי אורכי צלעות המשולש הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית. האיבר הראשון בסדרה שווה לאורך הצלע AB .

נתון: $AB = 1$.

ד(1). האם ייתכן שהאיבר השני בסדרה שווה לאורך הצלע BC ? נמקו את תשובתכם.

ד(2). מצאו את אורך הצלע BC (בתשובתכם תוכלו להשאיר שורש).

שאלה 2 · סדרה הנדסית יורדת וסדרת הסכומים של שלושה איברים עוקבים: מנה, סכום אין-סופי, סדרה

קבועה וסכום מתחלף

a_n היא סדרה הנדסית אין-סופית יורדת שכל איבריה חיוביים ומנתה היא q .

א. לפניכם שלוש טענות I-III. קבעו איזו מן הטענות נכונה ונמקו את קביעתכם.

I. $-1 < q < 0$

II. $0 < q < 1$

III. $1 < q$

b_n היא סדרה אין-סופית שאיבריה מקיימים $b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ לכל n טבעי.

ב. הוכיחו כי הסדרה b_n היא הנדסית ומנתה היא q .

נתון כי סכום הסדרה b_n גדול פי 1.96 מסכום הסדרה a_n .

ג. מצאו את הערך של q .

c_n היא סדרה שאיבריה מקיימים $c_n = \frac{b_n}{4a_n}$ לכל n טבעי.

נתון כי סכום k האיברים הראשונים בסדרה הוא 34.79.

ד(1). הוכיחו כי הסדרה c_n היא קבועה.

ד(2). מצאו את הערך של k .

החליפו את הסימן של כל אחד מן האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה c_n .

ה. מצאו את סכום k האיברים הראשונים בסדרה c_n לאחר החלפת הסימנים. נמקו את תשובתכם.

שאלה 3 · קבלה לעבודה בשלושה שלבים: הסתברות מותנית מיחס, מציאת p , בייס וברנולי

כדי להתקבל לעבודה בחברה מסוימת על המועמדים לעבור שלושה שלבי קבלה זה אחר זה: מבחן א', מבחן ב' וריאיון אישי. רק מועמד שעובר את מבחן א' ניגש למבחן ב', ורק מועמד שעובר את מבחן ב' ניגש לריאיון. מועמד שעובר את כל שלושת השלבים מתקבל לעבודה.

ההסתברות שמועמד יעבור את מבחן א' היא p ($0 < p < 1$). ההסתברות שמועמד שעבר את מבחן א' יעבור את מבחן ב' גדולה פי 2 מן ההסתברות שמועמד יעבור את מבחן א'. ההסתברות שמועמד יתקבל לעבודה גדולה פי 3 מן ההסתברות שמועמד יעבור את שני המבחנים ולא יעבור את הריאיון.

א. מצאו את ההסתברות שמועמד שעבר את שני המבחנים יעבור את הריאיון.

94% מן המועמדים לא מתקבלים לעבודה.

ב. מצאו את הערך של p .

ג. ידוע כי מועמד לא התקבל לעבודה. מהי ההסתברות שמועמד זה עבר את מבחן א'?

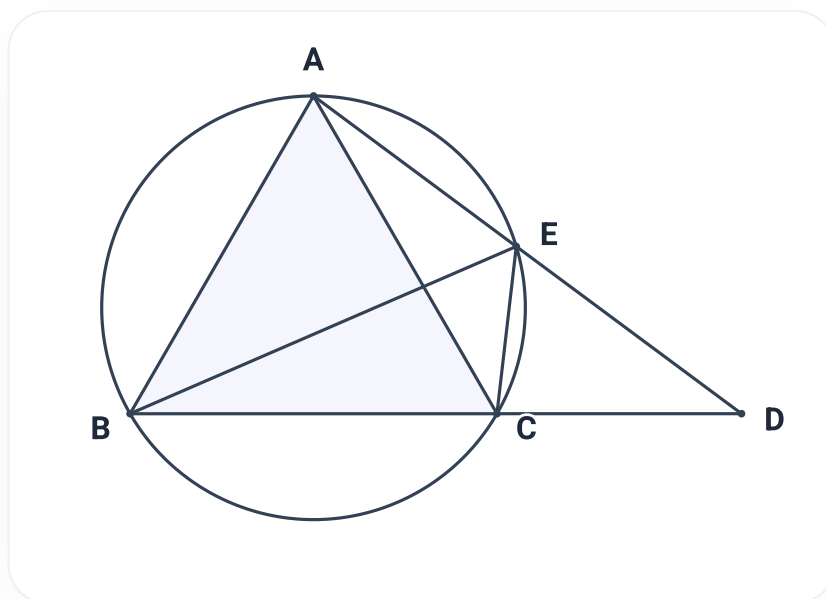
מבין כל המועמדים שלא התקבלו לעבודה בוחרים באקראי 5 מועמדים.

ד. מהי ההסתברות שלפחות שניים מהם עברו את מבחן א'?

שאלה 4 · משולש שווה צלעות חסום במעגל וחותר מנקודה על המשך צלע: זוויות היקפיות, דמיון ויחס

שטחים

ABC הוא משולש שווה צלעות חסום במעגל. הנקודה D נמצאת על המשך הצלע BC , כמתואר בסרטוט. הקטע AD חותך את המעגל בנקודה E .



א. הוכיחו: $\angle AEB = \angle BEC = \angle CED = 60^\circ$.

ב. הוכיחו: $\triangle AEB \sim \triangle CED$.

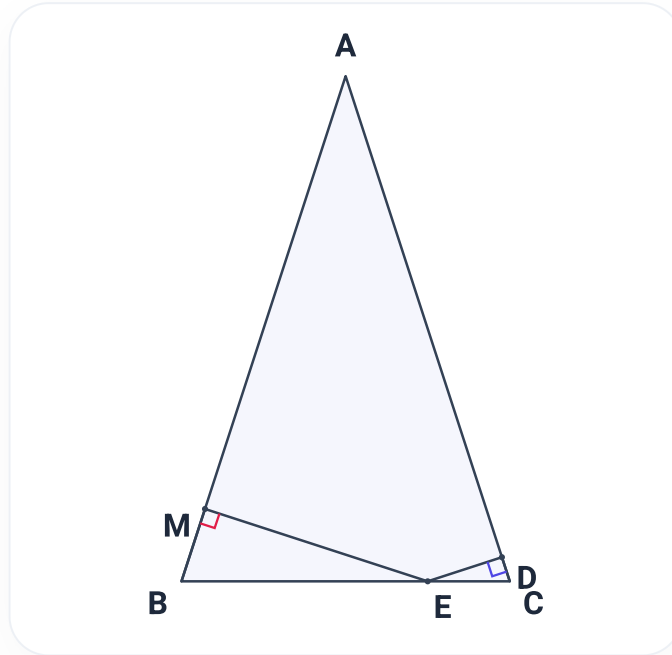
ג. הוכיחו: $\frac{AE}{CE} = \frac{BC}{CD}$.

נתון כי שטח המשולש AEB גדול פי 2.25 משטח המשולש CED .

ד. מצאו פי כמה גדול שטח המשולש ABD משטח המשולש CED .

שאלה 5 · משולש שווה-שוקיים ואנכים מנקודה על הבסיס: סכום שטחים, $\sin 2\alpha$ ומעגל חוסם

בסרטוט שלפניכם משולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$). הנקודה E נמצאת על הבסיס BC כך ש- $BE = 3 \cdot EC$. הנקודה D נמצאת על הצלע AC כך ש- $ED \perp AC$. הנקודה M נמצאת על הצלע AB כך ש- $EM \perp AB$. נסמן: $\angle ABC = \alpha$, $EC = k$, $30^\circ < \alpha < 90^\circ$.



- א. הביעו באמצעות k ו- α את אורכי הקטעים ME ו- DE .
 - ב. מצאו את הערך של α .
 - ג. מצאו את הערך של k .
- נתון כי סכום שטחי המשולשים BEM ו- CED הוא $1.6k^2$.
נתון כי אורך רדיוס המעגל החוסם את המשולש AED הוא 29.

שאלה 6 · חקירת $\frac{6(x-1)^2}{x^2+a}$ עם פרמטר, והשטח מתחת ל- $-\frac{f'}{f^2}$

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{6(x-1)^2}{x^2+a}$. הוא פרמטר חיובי.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן. הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

נתון כי שיעור ה- y של נקודת המקסימום של הפונקציה $f(x)$ הוא 7.5.

ג. מצאו את הערך של a .

בעבור הערך של a שמצאתם ענו על הסעיפים ד-ה.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$.

ה(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ה(2). מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$.

ה(3). חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x בתחום $-a \leq x \leq 0$.

שאלה 7 · חקירת $\sin^2 x \cdot \cos 2x$ בתחום סגור והפונקציה $\sqrt{a \cdot f'(x)}$

נתונה הפונקציה: $f(x) = (\sin x)^2 \cdot \cos(2x)$, המוגדרת בתחום $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

א. הוכיחו כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ב. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת בתחום $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$. נתונה הפונקציה: $g(x) = \sqrt{a \cdot f'(x)}$, הוא פרמטר שלילי.

ד(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

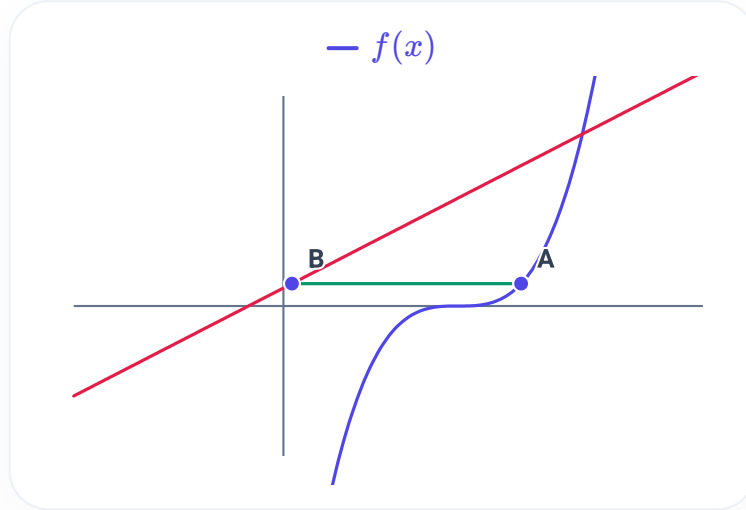
ד(2). מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x .

נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד בתחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

שאלה 8 · קטע אופקי בין גרף $(4x - 2)^3$ לישר: אורך מינימלי ומקסימלי בתחום סגור

בסרטוט שלפניכם מתוארים גרף הפונקציה: $f(x) = (4x - 2)^3$ והישר $y = 3x + b$. הוא פרמטר חיובי. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ כך ששיעור ה- x שלה קטן משיעור ה- x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הישר הנתון. הנקודה B נמצאת על הישר הנתון כך שהקטע AB מקביל לציר ה- x . נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה A . נתון: $0 \leq t \leq 0.7$.



א. הביעו באמצעות b ו- t את שיעור ה- x של הנקודה B .

ב(1). מצאו את הערך של t שבעבורו אורך הקטע AB הוא מינימלי.

ב(2). מצאו את הערך של t שבעבורו אורך הקטע AB הוא מקסימלי.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math