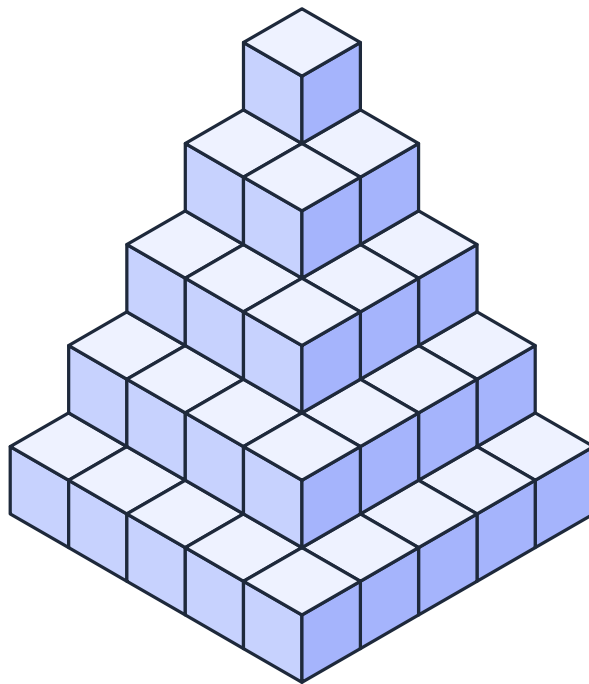


שאלה 1 · שאלות קצרות: סדרה חשבונית במרובע, סכום ריבועים, פישוט טריגונומטרי ו- $\frac{1}{g(x)}$ מגרף

ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. נתון מרובע ABCD שבו גודלי הזוויות מהווים סדרה חשבונית עולה. איברי הסדרה הם: a_1, a_2, a_3, a_4 . הוכיחו כי אם מתקיים: $\angle A = a_1$, $\angle B = a_2$, $\angle C = a_3$, $\angle D = a_4$, אז אפשר לחסום את המרובע ABCD במעגל.

נתון מגדל קוביות ובו 5 קומות (ראו ציור). הקומה התחתונה בנויה מ-25 קוביות המסודרות בצורת ריבוע. הקומה שמעליה בנויה מ-16 קוביות המסודרות בצורת ריבוע. וכך הלאה עד לקומה העליונה שבה יש קובייה אחת.



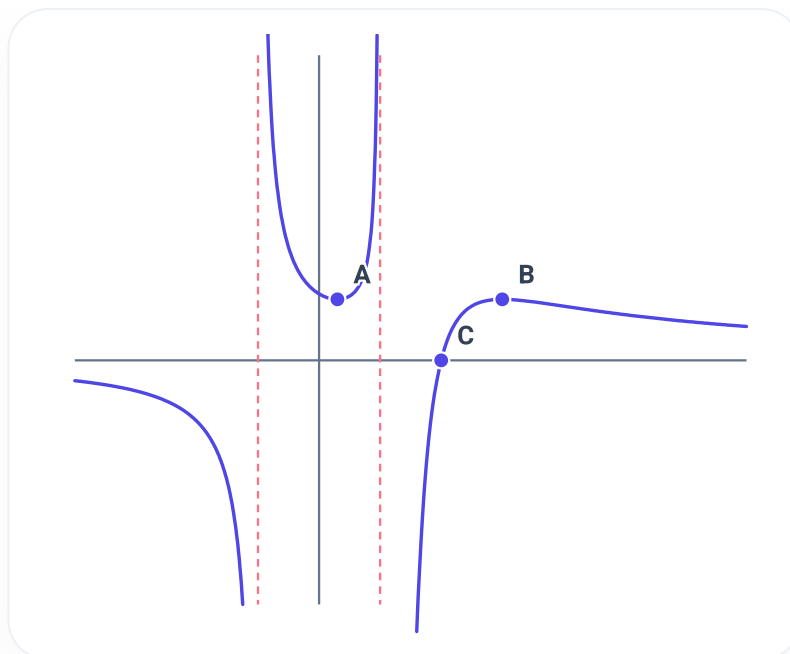
תוכלו להיעזר בנוסחה (לכל n טבעי): $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$.

ב(1). כמה קוביות סך הכול דרושות כדי לבנות באותו אופן מגדל שבו 7 קומות?

ב(2). נתון מגדל ובו 10 קומות הבנוי באותו אופן שבו בניי המגדל המתואר בתחילת סעיף ב. כמה קוביות צריך להוסיף למגדל זה, כדי שיהיה בו 100 קומות הבנויות באותו אופן? פרטו את חישוביכם.

ג. נתונה הפונקציה: $f(x) = [\cos(x - \pi) + \cos(\pi - x)]^2 + 4(\sin(-x))^2 - 5$ המוגדרת לכל x . האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות חיתוך עם ציר ה- x ? נמקו את תשובתכם.

הגרף שלפניכם מתאר את הפונקציה $g(x)$ שתחום ההגדרה שלה הוא: $x \neq -1$, $x \neq 1$. הישרים: $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$ הם אסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$. הנקודה $A(0.3, 1)$ היא נקודת המינימום היחידה של הפונקציה $g(x)$, הנקודה $B(3, 1)$ היא נקודת המקסימום היחידה של הפונקציה $g(x)$, והנקודה $C(2, 0)$ היא נקודת החיתוך היחידה של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x .



ד(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה: $\frac{1}{g(x)}$.

ד(2). בכמה נקודות נפגשים הגרף של $g(x)$ והגרף של $\frac{1}{g(x)}$? נמקו את תשובתכם.

שאלה 2 · סדרה הנדסית: סדרת ההופכיים, יחס סכומים וסדרה עם סימנים מתחלפים

נתונה סדרה הנדסית A שאיבריה הם: $a_1, a_2, a_3, \dots$ ומנתה היא q . כל איברי הסדרה A שונים מאפס.

א. האם הסדרה: $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots$ היא סדרה הנדסית? הוכיחו את תשובתכם.

ב(1). מסמנים ב- S_n את הסכום של n האיברים הראשונים של הסדרה A (n טבעי). הוכיחו כי לכל n מתקיים:

$$\frac{S_n}{a_1 \cdot a_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}$$

ב(2). נתון: $a_1 = 1$, $q = 3$. סכום n האיברים הראשונים בסדרה A גדול פי 6561 מן הסכום:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}$$
 מצאו את n .

הסדרה B מתקבלת מן הסדרה A על ידי הפיכת הסימנים של האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה A. איברי הסדרה B הם: $b_1, b_2, b_3, \dots$. נסמן ב- T_m את הסכום של m האיברים הראשונים של הסדרה B. נתון כי m הוא מספר טבעי אי-זוגי.

ג. נתונה נוסחה: $\frac{T_m}{b_1 \cdot b_m} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \dots + \frac{1}{a_m}$. קבעו אם הנוסחה ניתונה נכונה. הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 3 · דגימה בלי החזרה: מבחן קבלה, מציאת מספר השאלות והסתברות מותנית

כדי להתקבל ללימודים במכללה מסוימת יש לעבור מבחן קבלה. כל השאלות במבחן הן מתוך מאגר שיש בו n שאלות שונות. לנבחנים יש גישה למאגר והם יכולים להתכונן למבחן באמצעותו. ביום הבחינה, כל נבחן מוציא באקראי מתוך קופסה מלאה בפתקים שלושה פתקים בזה אחר זה, ללא החזרה. בכל אחד מן הפתקים כתובה שאלה אחת מתוך מאגר השאלות. מספר הפתקים שבקופסה שווה למספר השאלות שבמאגר, ובכל פתק כתובה שאלה אחת. לאחר שהוציא הנבחן שלושה פתקים מן הקופסה וקרא את שלוש השאלות, הוא מחזיר את שלושת הפתקים לקופסה.

הנבחן יתקבל למכללה אם הוא יענה נכון על שתי שאלות לפחות מתוך שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא. נתנאל התכונן למבחן באמצעות מאגר השאלות. הוא ידע לענות נכון רק על 20 שאלות מתוך n השאלות שבמאגר. על שאר השאלות הוא לא ידע לענות נכון.

ידוע כי ההסתברות של נתנאל לענות נכון על שאלה אחת לפחות מבין שתי השאלות שבשני הפתקים הראשונים שהוא הוציא היא $\frac{34}{69}$.

א(1). מצאו את n .

א(2). מהי ההסתברות שנתנאל יתקבל למכללה?

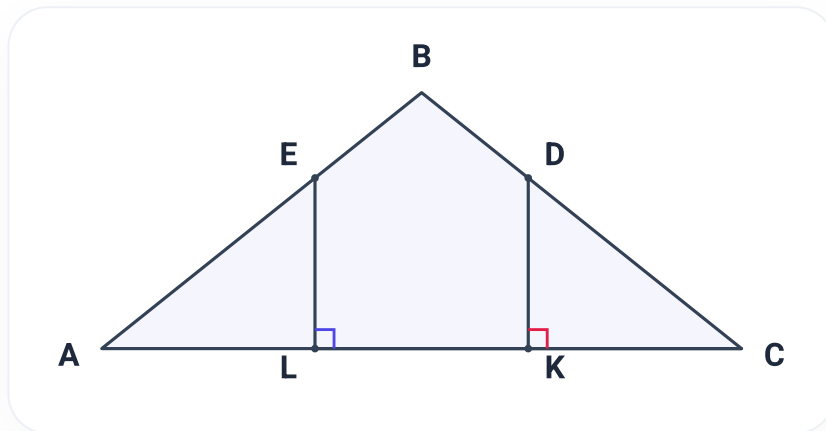
ב. אם ידוע כי נתנאל התקבל למכללה, מהי ההסתברות שהוא לא ענה נכון על השאלה שבפתק הראשון שהוא הוציא?

רמי התכונן גם הוא למבחן באמצעות מאגר השאלות. הוא ידע לענות נכון על 40 שאלות מתוך n השאלות שבמאגר. על שאר השאלות הוא לא ידע לענות נכון.

ג. האם ההסתברות שרמי יענה נכון על כל שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא באקראי גדולה פי 2 מן ההסתברות שנתנאל יענה נכון על כל שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא באקראי? נמקו את תשובתכם.

שאלה 4 · משולש שווה-שוקיים: אנכים לבסיס, דלתון ומרובע בר-חסימה

בציור שלפניכם מתואר משולש שווה-שוקיים ABC , $BA = BC$. מנקודה D הנמצאת על השוק BC הורידו אנך לבסיס, והוא חותך אותו בנקודה K . מנקודה E הנמצאת על השוק BA הורידו אנך לבסיס, והוא חותך אותו בנקודה L . נתון: $AL = LK = KC$.



א. חשבו את: $\frac{BD}{DC}$.

הקטעים DL ו- EK נפגשים בנקודה G .

ב. הוכיחו כי המרובע $BDGE$ הוא דלתון.

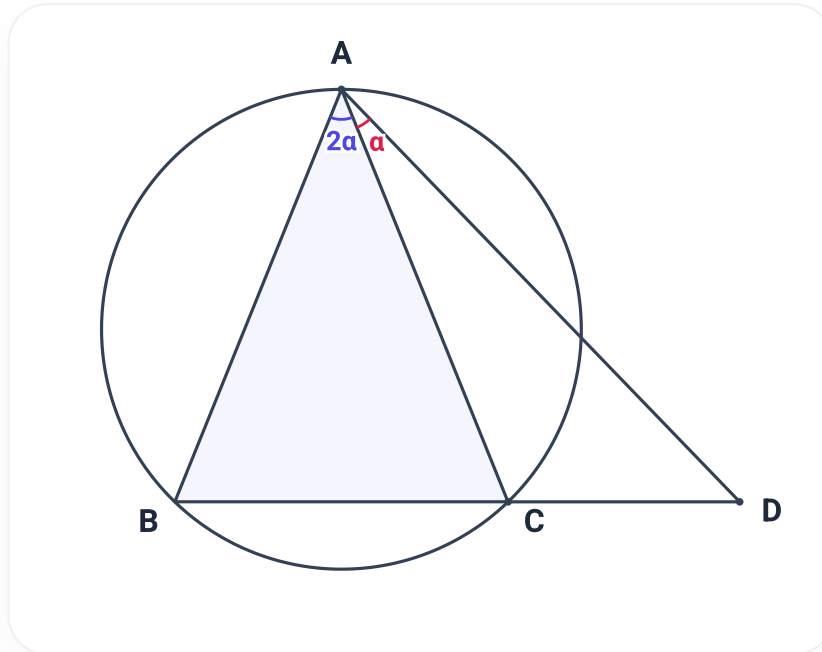
נתון: $AC = 45$. היקף המרובע $EDKL$ הוא 54.

ג. חשבו את אורך הקטע BG .

ד. האם קיימת נקודה F שנמצאת על הישר BG שעבורה המרובע $BDFE$ הוא בר-חסימה במעגל? נמקו את תשובתכם.

שאלה 5 · משולש שווה-שוקיים חסום במעגל והמשך הבסיס: רדיוסים חוסמים, שטח ויחס שטחים

בציור שלפניכם מתואר משולש שווה-שוקיים ABC , $AB = AC$, שחסום במעגל שרדיוסו R . האריכו את הבסיס BC עד לנקודה D והעבירו ישר מנקודה D לנקודה A . נתון: $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle CAD = \alpha$.



א. הוכיחו כי רדיוס המעגל החוסם את משולש ABD שווה לרדיוס המעגל החוסם את משולש ACD .

ב. הביעו את שטח משולש ACD באמצעות R ו- α .

נסמן ב- m את היחס בין שטח המשולש ACD לבין שטח המשולש ABC .

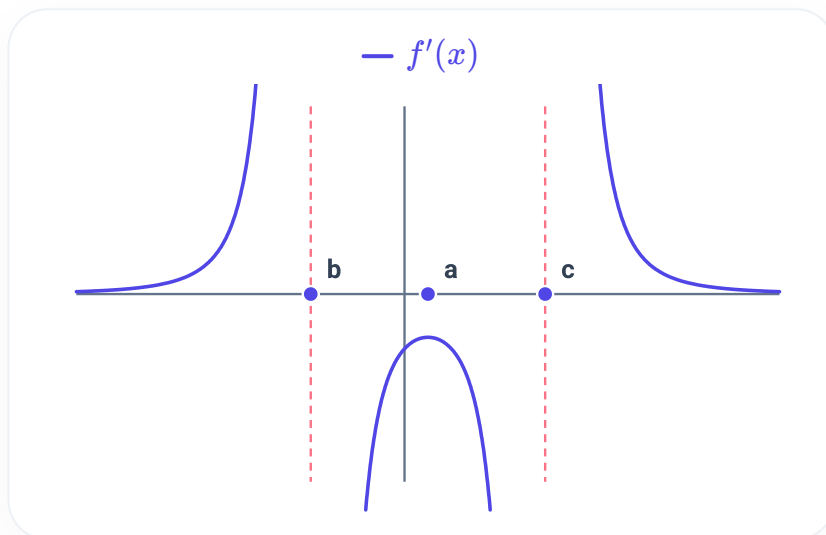
ג(1). האם ייתכן כי $m = 0.5$? נמקו את תשובתכם.

ג(2). נתון כי $m = 0.6$. מצאו את גודלי זוויות המשולש ABC .

שאלה 6 · מגרף הנגזרת לפונקציה: מונוטוניות, קעירות, סקיצה ושטח של $f' \cdot f^2$

נתונה פונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום: $x < b$, $b < x < c$, $c < x$ וגזירה בכל תחום הגדרתה. בסרטוט שלפניכם מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד ושלוש אסימפטוטות המאונכות לצירים: $x = b$, $y = 0$, $x = c$. שיעור ה- x של נקודת הקיצון של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ הוא a . a , b ו- c הם פרמטרים.



הביעו את תשובותיך באמצעות a , b ו- c , אם יש צורך.

א(1). מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה ($\cup$) ואת תחומי הקעירות כלפי מטה ($\cap$) של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ עובר בנקודה $(a, 0)$.

ב. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון גם כי: $f(x) = \frac{18-36x}{(x^2-x-6)^2}$.

ג. מצאו את a , b ו- c .

ד(1). הראו כי בתחום $b < x < c$ מתקיים: $f'(x) \cdot (f(x))^2 \leq 0$.

ד(2). חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה: $f'(x) \cdot (f(x))^2$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = 0$ ו- $x = 2a$.

שאלה 7 · הפונקציות $\tan x + \frac{1}{x}$ ו- $\frac{\cos x}{x}$: חיוביות, אי-זוגיות וקיצון באפס של פונקציה אחרת

נתונה הפונקציה: $f(x) = \tan(x) + \frac{1}{x}$.

ענו על הסעיפים א-ב בעבור התחום: $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

א(1). מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

א(2). מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה- x .

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בתחום הנתון בנקודה אחת בלבד ששיעוריה $(2.798, 0)$ בקירוב.

ב. מצאו את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של הפונקציה $f(x)$.

נתונה גם הפונקציה: $g(x) = \frac{\cos(x)}{x}$, המוגדרת לכל $x \neq 0$.

ג. האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי-זוגית, או לא זוגית ולא אי-זוגית? הוכיחו את תשובתכם.

ד(1). הראו כי בתחום: $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ שיעור ה- x של אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ שווה לשיעור ה- x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x , וקבעו את סוגה של נקודת קיצון זו.

ד(2). סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום: $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

שאלה 8 · חוט שנחתך למשולש שווה-צלעות ולמעגל: סכום שטחים מינימלי

חותכים חוט שאורכו k לשני חלקים. מחלק אחד של החוט יוצרים משולש שווה-צלעות ומן החלק האחר יוצרים מעגל. נסמן ב- x את אורך צלע המשולש.

א. הביעו באמצעות k את תחום ההגדרה של x .

ב. הביעו באמצעות k את אורך צלע המשולש, שעבורו סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי.

ג. הראו כי כאשר סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי, אי אפשר לחסום את המשולש שהתקבל במעגל שהתקבל.

כל הבגרויות במתמטיקה עם פתרונות מלאים: www.guyai.co.il/bagrut/math